Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) **Sommersemester 2019**

Prof. Dr. Alexander Mirlin **2. Klausur, 07.10.2019, Gerthsen-HS**

PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex **120 Minuten: 11:00-13:00 Uhr**

---

1. Übernächste Nachbarn im Heisenberg-Modell (10+15+15 = 40 Punkte)

Betrachten Sie das Heisenberg-Modell aus $N \gg 1$ Spins mit $S \geq 1/2$ in einem dreidimensionalen kubischen Gitter mit Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn als auch zwischen übernächsten Nachbarn (d.h. die 12 Gitterplätze mit dem zweitkürzesten räumlichen Abstand). Der Hamilton-Operator lautet dann:

$$H = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \,.$$

Dabei sei $J_1 > J_2 > 0$ und wir bezeichnen mit $\langle ij \rangle$ Paare nächster Nachbarn im Gitter sowie mit $\langle\langle ij \rangle\rangle$ Paare übernächster Nachbarn. Beachten Sie, dass $\vec{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ ein quantenmechanischer Operator mit $\vec{s}_i^{\,2} = S(S+1)$ ist.

(a) Führen Sie die Molekularfeld-Näherung durch und bringen Sie den genäherten Hamilton-Operator auf die Form

$$H \simeq H_{\mathrm{MF}} = -\vec{B}_{\mathrm{eff}} \cdot \sum_i \vec{s}_i + E_0 \,.$$

Bestimmen Sie das molekulare Feld $\vec{B}_{\mathrm{eff}}$ sowie die Konstante E_0 in Abhängigkeit vom mittleren Spin $\langle \vec{s} \rangle$. Geben Sie die Zustandssumme Z_{MF} für H_{MF} an.

Hinweis: Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass $\vec{B}_{\mathrm{eff}}$ in z-Richtung zeigt.

(b) Leiten Sie die Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung M her. Finden Sie die Übergangstemperatur T_c in der Molekularfeld-Näherung.

Hinweis: $\dfrac{d}{dx}\coth(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2(x)}, \qquad \dfrac{1}{\sinh^2(x)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)$

(c) Ausgehend von H_{MF} leiten Sie das Freie-Energiedichte-Funktional

$$f(\varphi) = f_N + \frac{t}{2}\,\varphi^2 + b\,\varphi^4$$

für das System in der Nähe des Übergangs her. Bestimmen Sie f_N, t und b (numerische Faktoren müssen nicht vereinfacht werden).

Hinweis:

$$\ln \frac{\sinh(Ax)}{\sinh(x)} = \ln A + \frac{1}{6}\left(A^2 - 1\right) x^2 + \frac{1}{180}\left(1 - A^4\right) x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Bitte wenden!

2. Transfermatrixmethode im dimerisierten 1D-Ising-Modell (30 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell für $2N$ Spins ($S = 1/2$) auf einem Ring ($s^z_{2N+1} = s^z_1$) mit einer "Dimerisierung" der Kette, d.h. die Bindungen werden alternierend geschwächt und gestärkt:

$$H = -J_- \sum_{i=1}^{N} s^z_{2i-1} s^z_{2i} - J_+ \sum_{i=1}^{N} s^z_{2i} s^z_{2i+1}.$$

Nehmen Sie an, dass $J_+ > J_- > 0$. Führen Sie alternierende Transfermatrizen $\mathcal{T}_+$ und $\mathcal{T}_-$ ein und bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z. Berechnen Sie für $N \to \infty$ die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2$ (wobei $\sigma_i = 2s^z_i$). Dabei seien sowohl i als auch n ungerade und $n \ll N$.

Hinweis: Bei der Berechnung der Korrelationsfunktion ist es nützlich in der Eigenbasis von $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \mathcal{T}_+$ zu arbeiten, in der σ_z und $\mathcal{T}_z := \mathcal{T}_- \sigma_z \mathcal{T}_+$ nur Nicht-Diagonalen-Elemente haben.

3. RC-Schaltung mit Rauschen (15+15=30 Punkte)

Eine Parallelschaltung aus einem elektrischen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C lässt sich mit der Langevin-Gleichung

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = \delta I(t)$$

beschreiben, wobei $\langle \delta I(t) \rangle = 0$ und $\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t')$. Es handelt sich somit um Nyquist-Rauschen.

(a) Führen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung $\rho(V, t)$ ein und leiten Sie die Fokker-Planck-Gleichung für ρ aus der Langevin-Gleichung her.

(b) Lösen Sie die Fokker-Planck-Gleichung im stationären Fall.

Hinweis: Die Differentialgleichung kann auf 1. Ordnung reduziert werden. Beachten Sie, dass aus Symmetriegründen $\rho(V) = \rho(-V)$ und damit $\frac{d\rho}{dV}\big|_{V=0} = 0$. Danach kann die Substitution $y = V^2$ hilfreich sein.