Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIb 2019

Prof. Dr. Alexander Mirlin

PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex

Lösungen zu Blatt 0

Besprechung: 26.04.2019

Ad-hoc-Aufgaben zur Wiederholung (insgesamt 60 Bonuspunkte)

1. Besetzungszahldarstellung (10 + 10 = 20 Punkte)

In einem Quantensystem seien die Einteilchen-Zustände mit Energien ϵ_λ bekannt. Schreiben Sie die großkanonische Zustandssumme

$$Z_G = \sum_{\text{Zust.}} e^{-\beta(E-\mu N)}$$

in Besetzungszahldarstellung für

(a) Bosonen

(b) Fermionen

Welche Zustände sind dabei jeweils möglich? Bringen Sie Z_G nun in die Form $\prod_\lambda Z_\lambda$ und geben Sie Z_λ an! Leiten Sie daraus die Bose- bzw. die Fermi-Funktion her, indem Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n_\lambda \rangle$ berechnen!

Lösung:

Die Zustände können durch die Besetzungszahlen der Einteilchen-Zustände angegeben werden: $|n_1, n_2, n_3, \ldots\rangle = |\{n_\lambda\}\rangle$. Dabei gilt bei Bosonen $n_\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ und bei Fermionen $n_\lambda = 0, 1$ (Pauli-Prinzip). Dann gilt

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \qquad E = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda$$

Zustandssumme:

$$Z_G = \sum_{|\{n_\lambda\}\rangle} e^{-\beta(E-\mu N)} = \sum_{|\{n_\lambda\}\rangle} e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)}$$

Bosonen:

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \ldots e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1(\epsilon_1 - \mu)} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2(\epsilon_2 - \mu)} \right) \ldots = \prod_\lambda Z_\lambda$$

wobei $Z_\lambda = \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} \left(e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} \right)^{n_\lambda} = \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} \right)^{-1}$.

Fermionen:

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} \ldots e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} = \left(\sum_{n_1=0}^{1} e^{-\beta n_1(\epsilon_1 - \mu)} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{1} e^{-\beta n_2(\epsilon_2 - \mu)} \right) \ldots = \prod_\lambda Z_\lambda$$

wobei $Z_\lambda = \sum_{n_\lambda=0}^{1} \left(e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}\right)^{n_\lambda} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}$.

Mittlere Besetzungszahl:

$$\langle n_\lambda \rangle = \sum_{n_\lambda} W_\lambda(n_\lambda) n_\lambda = \sum_{n_\lambda} \frac{e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)}}{Z_\lambda} n_\lambda$$

Bosefunktion:

$$n_B(\epsilon_\lambda) = \langle n_\lambda \rangle_B = \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} n_\lambda e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)} \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu} \ln Z_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda-\mu)} - 1}$$

Fermifunktion:

$$n_F(\epsilon_\lambda) = \langle n_\lambda \rangle_F = \sum_{n_\lambda=0}^{1} n_\lambda \frac{e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda-\mu)} + 1}$$

2. Quantengase (20 Punkte)

In einem (makroskopischen) Zylinder der Länge L mit einer dissipationsfrei entlang der Achse beweglichen Trennwand befinde sich in der linken Kammer ein ideales Bosegas und in der rechten ein ideales Fermigas. Die Teilchenzahl beider Gase sei gleich ($N_B = N_F$) und wir vernachlässigen der Einfachheit halber in dieser Aufgabe den Spin der Teilchen. Diskutieren Sie qualitativ die Position x der Trennwand als Funktion der Temperatur T im Zylinder!

Lösung:

Die Position der Trennwand stellt sich so ein, dass der Druck in beiden Gasen gleich ist. Bei hoher Temperatur verhalten sich beide Gase wie ein Maxwell-Boltzmann-Gas. Also erwarten wir, bei gleicher Teilchenzahl, in beiden Gasen den gleichen Druck bei gleichem Volumen. Demnach gilt $x = L/2$ im Limes $T \to \infty$.

Für geringere Temperaturen, bei denen Quanteneffekte beginnen eine Rolle zu spielen, ist der Druck in einem Fermigas gegenüber einem klassischen Gas durch das Pauli-Prinzip erhöht, während die Quantenkorrekturen im Bosegas eine Reduktion des Drucks im Vergleich zum klassischen Gas bewirken – z.B. gilt in erster Ordnung der Virialentwicklung (siehe Vorlesung):

$$P = \frac{N k_B T}{V}\left(1 \pm \frac{\lambda_T^3 n}{2^{5/2}} + \dots\right)$$

mit $+$ für Fermionen und $-$ für Bosonen. Wir erwarten also, dass sich die Trennwand bei Abkühlung auf geringe Temperaturen nach links verschiebt.

Bei einer kritischen Temperatur T_c kommt es zur Bose-Einstein-Kondensation in der linken Kammer. Die makroskopische Besetzungszahl des Grundzustandes trägt dann nicht mehr zum Druck bei. An T_c wird $x(T)$ nicht differenzierbar sein. Der Druck des Bosegases unterhalb von T_c ist durch den nicht kondensierten Anteil der Teilchen bestimmt und ist unabhängig vom Volumen. Es gilt dann $P_B \propto T^{5/2}$.

Der Druck des Fermigases strebt hingegen für $T \to 0$ einen Nullpunktsdruck $P_F > 0$ an. Der Grund ist die Besetzung aller Zustände bis zur Fermienergie. Sobald die Temperatur so klein wird, dass $P_B(T) < P_F$, rutscht die Trennwand bis an den linken Rand des Zylinders.
Genauer: zunächst nur sehr nahe an den Rand. Im Limes $V \to 0$ trägt auch das Kondensat zum Bose-Druck bei. Der Beitrag ist proportional zu $\ln(1-z)/V$ (Fugazität z), wobei $1 - z \propto 1/V$. In der Vorlesung wurde argumentiert, dass dies für $V \to \infty$ verschwindet. Das Volumen des Bosegases muss also "gerade noch makroskopisch" sein. Erst bei $T = 0$ verschwindet der Druck des Bosegases.

3. Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme (5 + 10 + 5 = 20 Punkte)

(a) Notieren Sie den Spin-Operator $\mathbf{S}$. Wie groß ist die Energie eines Spins in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$?

(b) Notieren Sie die kanonische Zustandssumme eines Systems aus N nicht-wechselwirkenden Spins im Feld $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$. Bestimmen Sie die freie Energie, die Entropie und die magnetische Suszeptibilität.

(c) Notieren Sie den Hamilton-Operator eines Elektrons im Magnetfeld. Welche Beiträge zur Energie führen zu paramagnetischem oder diamagnetischem Verhalten?

Lösung:

(a) $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}$ mit den Pauli-Matrizen (in Spin-z Basis):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\text{Energie im Magnetfeld:} \qquad E_B = -\frac{1}{2}g\mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$$

(b)

$$Z = Z_1^N \qquad \text{mit} \qquad Z_1 = \sum_{s_z=\pm\frac{1}{2}} e^{\beta g\mu_B B s_z} = 2\cosh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)$$

$$F = -k_BT\ln Z = -Nk_BT\ln\left[2\cosh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)\right]$$

$$S = -\partial_T F = Nk_B\ln\left[2\cosh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)\right] - Nk_B\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\tanh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)$$

$$M = -\partial_B F = \frac{1}{2}Ng\mu_B\tanh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = N\left(\frac{1}{2}g\mu_B\right)^2\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)}$$

(c) $H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \frac{1}{2}g\mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$

Der Beitrag des Vektorpotentials zum Impuls führt zu Landau-Diamagnetismus (vgl. voriges Semester Blatt 6 Nr. 2). Der Beitrag des Spins zur Energie führt zu Pauli-Paramagnetismus (Vorlesung).