

Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) Sommersemester 2019

Prof. Dr. Alexander Mirlin

Blatt 7

PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex

Besprechung: 14.06.2019

Aufgaben zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

1. Heisenbergmagnet mit zusätzlicher Wechselwirkung (15 Punkte)

Wir betrachten das Heisenbergmodell für $N \gg 1$ Spins mit $S = 1$ auf einem kubischen Gitter mit einer zusätzlichen Wechselwirkung:

$$H = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - J_2 \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)^2 \quad (1)$$

wobei über nächste Nachbarn summiert wird und $J_1 > 0$ und J_2 beliebig.

- (a) Führen Sie die Molekularfeldnäherung für H durch. Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem molekularen Feld und dem mittleren Spin an. Wie lautet die Zustandssumme in der Molekularfeldnäherung?

Lösung: Um die Molekularfeldnäherung durchzuführen substituieren wir im Hamiltonian $\vec{s}_i = \langle \vec{s}_i \rangle + \delta \vec{s}_i$ (mit $\delta \vec{s}_i = \vec{s}_i - \langle \vec{s}_i \rangle$) und vernachlässigen höhere Ordnungen in $\delta \vec{s}_i$. Weiter nutzen wir, dass $\langle \vec{s}_i \rangle = \langle \vec{s} \rangle$ und finden

$$H_{\text{MF}} = -J_1 z \langle \vec{s} \rangle \sum_i \vec{s}_i + \frac{N}{2} J_1 z \langle \vec{s} \rangle^2 - 2J_2 z \langle \vec{s} \rangle^3 \sum_i \vec{s}_i + \frac{3N}{2} J_2 z \langle \vec{s} \rangle^4. \quad (2)$$

Nach Substitution $J_1 \rightarrow J$ sind die beiden ersten Terme sind mit der Lösung aus Aufgabe 1, Blatt 3 identisch. Wir fassen zusammen:

$$H_{\text{MF}} = -\vec{B} \sum_i \vec{s}_i + N\varepsilon_0, \quad (3)$$

mit $\vec{B} = J_1 z \langle \vec{s} \rangle + 2J_2 z \langle \vec{s} \rangle^3$ und $2\varepsilon_0 = J_1 z \langle \vec{s} \rangle^2 + 3J_2 z \langle \vec{s} \rangle^4$. Die Zustandssumme in der Molekularfeldnäherung ermittelt sich aus

$$Z_{\text{MF}} = \int \left[\prod_i \frac{\sin(\theta_i) d\theta_i d\phi_i}{4\pi} \right] e^{-\beta H_{\text{MF}}} = e^{-\beta N \varepsilon_0} \left[\int \frac{\sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi} e^{\beta B \cos(\theta)} \right]^N, \quad (4)$$

wobei wir hier einen klassischen Spin mit $\vec{s}_i = [\cos(\phi_i) \sin(\theta_i), \sin(\phi_i) \sin(\theta_i), \cos(\theta_i)]$ betrachten, und die z -Achse entlang des Molekularfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z$ gewählt haben. Eine zweifache Integration liefert nun

$$Z_{\text{MF}} = \left[e^{-\beta \varepsilon_0} \frac{\sinh(\beta B)}{\beta B} \right]^N. \quad (5)$$

Für den fall eines Quanten-Spins mit $S = 1$ findet man analog zu Blatt 3

$$Z_{\text{MF}} = \left\{ e^{-\beta \varepsilon_0} \frac{\sinh[\beta B(S + 1/2)]}{\sinh(\beta B)} \right\}^N. \quad (6)$$

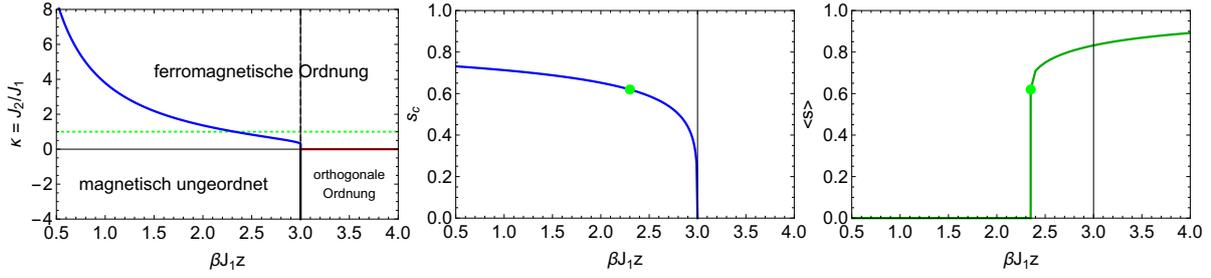


Abbildung 1: Links: Phasendiagramm der Molekularfeld-Theorie zum Heisenberg-Modell mit quartischer Wechselwirkung. Für $\kappa > 0$ und grosse β (kleine Temperaturen) gibt es eine geordnete ferromagnetische Phase. Der Phasenübergang (blau) ist erster Ordnung. Für $\kappa = 0$ ist der Phasenübergang zweiter Ordnung bei $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_c = 3$. Für $\kappa < 0$ entsteht eine komplexe magnetische Ordnung mit einem endlichen Moment, aber auch einem endlichen Wert des kompositen Ordnungsparameters $\langle \vec{s}_i \times \vec{s}_j \rangle$. Für $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c$ durchläuft das System einen Phasenübergang zweiter Ordnung als Funktion von κ (rot). Dieser kann nicht in der Molekularfeldnäherung beschrieben werden. Die grüne Linie zeigt den Schnitt welcher in der rechten Figur betrachtet wird. Mitte: Wert der Diskontinuität $\langle s \rangle = s_c$ am Phasenübergang bei $\kappa = \kappa_c(\tilde{\beta})$. Rechts: Verhalten des Ordnungsparameters $\langle s \rangle$ als Funktion von $\tilde{\beta}$ für einen festen Wert $\kappa = 1$. Der Übergang findet dann bei $\tilde{\beta} = 2.35$ ein (statt bei $\tilde{\beta} = 3$ für $\kappa = 0$) und besitzt dort eine Diskontinuität.

- (b) **(20 Bonuspunkte)** Leiten Sie die Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung her und untersuchen Sie in Abhängigkeit von J_2 welche Phasen auftreten können. *Hinweis: Sie können größtenteils analog zur Aufgabe 1, Blatt 3 vorgehen.*

Lösung: Wir schränken uns im Folgenden auf den klassischen Fall ein und nutzen die Beziehung $\langle s \rangle = (ZN)^{-1}[\partial Z / \partial(\beta B)]$ um die Selbstkonsistenzgleichung für $\langle s \rangle$ in der Molekularfeldnäherung zu erhalten. Diese lautet

$$\langle s \rangle = \coth(\beta B) - (\beta B)^{-1} = \coth[\beta J_1 z \langle s \rangle (1 + 2\kappa \langle s \rangle^2)] - [\beta J_1 z \langle s \rangle (1 + 2\kappa \langle s \rangle^2)]^{-1}, \quad (7)$$

wobei $\kappa \equiv J_2/J_1$. Mit $M = N\langle s \rangle$ entspricht obige Gleichung auch gleich der Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung M . In Anlehnung an Aufgabe 1 auf Blatt 3 erwarten wir für $\kappa = 0$, dass eine Lösung nur existiert wenn $\tilde{\beta} = \beta J_1 z$ genügend gross ist; dieser kritische Wert ist genau $\tilde{\beta}_c = 3$. Für $\tilde{\beta} < \tilde{\beta}_c$, existiert ein $\kappa_c > 0$ so dass folgende zwei Gleichungen bei $\langle s \rangle = s_c$ gelöst werden.

$$\begin{cases} s_c = \coth[\tilde{\beta} s_c (1 + 2\kappa_c s_c^2)] - [\tilde{\beta} s_c (1 + 2\kappa_c s_c^2)]^{-1} \\ 1 = \beta (1 + 6\kappa s_c^2) \{ [\tilde{\beta} s_c (1 + 2\kappa_c s_c^2)]^{-2} - \sinh[\tilde{\beta} s_c (1 + 2\kappa_c s_c^2)]^{-2} \}. \end{cases} \quad (8)$$

An diesem Wert springt der Ordnungsparameter $\langle s \rangle$ diskontinuierlich von 0 auf s_c . Für $\kappa > \kappa_c$ besitzt das System eine endliche Magnetisierung. Für $\kappa < 0$ bevorzugt der quartische Term eine Spin-Konfiguration bei der benachbarte Spins orthogonal zueinander stehen. Dadurch wird eine netto Magnetisierung nur für $\tilde{\beta} < \tilde{\beta}_c$ möglich sein. Für grosse negative Werte von κ wird die Magnetisierung allerdings stark unterdrückt. Abbildung 1 zeigt die verschiedenen Phasen im $\kappa\tilde{\beta}$ -Raum.

2. Spin-Flop im Antiferromagneten

(10 + 30 = 40 Punkte) In einem

Antiferromagneten gibt es zwei Beiträge \vec{m}_i ($i = 1, 2$) zur Magnetisierung mit $|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = M = \text{konst.}$ bei fester Temperatur. Die Austauschwechselwirkung trägt mit $f_{\text{ex}} = J\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2$ ($J > 0$) zur Dichte der freien Energie bei, wodurch $\vec{m}_1 = -\vec{m}_2$ bevorzugt wird. Außerdem haben die meisten Magnete eine Vorzugsrichtung (“easy axis”, dies sei die z -Richtung) der Magnetisierung. Dies wird durch den Anisotropie-Beitrag $f_{\text{an}} = -A(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)^2$ mit $A > 0$ beschrieben. Wir betrachten den Antiferromagneten nun in einem äußeren Magnetfeld parallel zur Anisotropieachse, $f_B = -B(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)$. Die freie Energiedichte lautet dann (für ein homogenes Kontinuumsmodell)

$$f(\vec{m}_1, \vec{m}_2) = f_{\text{ex}} + f_{\text{an}} + f_B = J\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - \sum_{i=1,2} [A(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)^2 + B(\vec{m}_i \cdot \vec{e}_z)] . \quad (9)$$

- (a) Es genügt, \vec{m}_i auf die xz -Ebene zu beschränken. Dann können wir in Polarkoordinaten bzgl. der z -Achse schreiben:

$$\vec{m}_i = \begin{pmatrix} m_{i,x} \\ m_{i,z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} . \quad (10)$$

Um die Konfiguration des Magneten zu beschreiben, ist es nützlich, zu den Winkeln $\theta = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ und $\phi = \vartheta_1 - \vartheta_2$ überzugehen. Finden Sie $f(\theta, \phi)$.

Lösung: Unter Verwendung der Aufgabestellung finden wir

$$f_{\text{ex}} = JM^2[\sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2) + \cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)] = JM^2 \cos(\phi) \quad (11)$$

$$f_{\text{an}} = -AM^2[\cos^2(\vartheta_1) + \cos^2(\vartheta_2)] = -AM^2[1 + \cos(\phi)\cos(2\theta)] \quad (12)$$

$$f_B = -BM[\cos(\vartheta_1) + \cos(\vartheta_2)] = -2BM \cos(\phi/2) \cos(\theta) \quad (13)$$

Die Isotropie des ersten Terms erkennt man an dessen Unabhängigkeit von θ . Diese Isotropie wird durch die Kristallanisotropie oder das externe Magnetfeld aufgehoben. Die freie Energiedichte lautet

$$f(\theta, \phi) = JM^2 \cos(\phi) - AM^2[1 + \cos(\phi)\cos(2\theta)] - 2BM \cos(\phi/2) \cos(\theta) \quad (14)$$

$$= (J - 2A)M^2 - 2JM^2 \sin^2(\phi/2) - 2BM \cos(\phi/2) \cos(\theta) + 2AM^2\{\sin^2(\phi/2) + \sin^2(\theta) - 2\sin^2(\phi/2)\sin^2(\theta)\} \quad (15)$$

Im letzten Ausdruck haben wir alle trigonometrischen Funktionen in elementaren Funktionen von θ und $\phi/2$ ausgedrückt.

- (b) Nun wird das Magnetfeld, beginnend bei $B = 0$, kontinuierlich erhöht. Berechnen Sie die Lage des Minimums (θ_0, ϕ_0) von $f(\theta, \phi)$ als Funktion des Feldes. Bei welchen kritischen Feldstärken treten Phasenübergänge auf? Was ist jeweils der Ordnungsparameter und welcher Ordnung sind die Übergänge? Wie hängt die Anzahl der Phasenübergänge von A/J ab? Skizzieren Sie $\theta_0(B)$ und $\phi_0(B)$ für zwei qualitativ verschiedene Fälle.

Bemerkung: einen Übergang der Magnetisierung in eine Ausrichtung (ungefähr) senkrecht zur Anisotropieachse bezeichnet man auch als “spin-flop transition”.

Lösung: Einfaches Ableiten der Funktion nach θ und ϕ liefert zwei Extremalgleichungen

$$\sin(\theta)\{B \cos(\phi/2) + 2AM \cos(\theta)[1 - 2\sin^2(\phi/2)]\} = 0 \quad (16)$$

$$\sin(\phi/2)\{B \cos(\theta) - 2M \cos(\phi/2)[J - A + 2A \sin^2(\theta)]\} = 0. \quad (17)$$

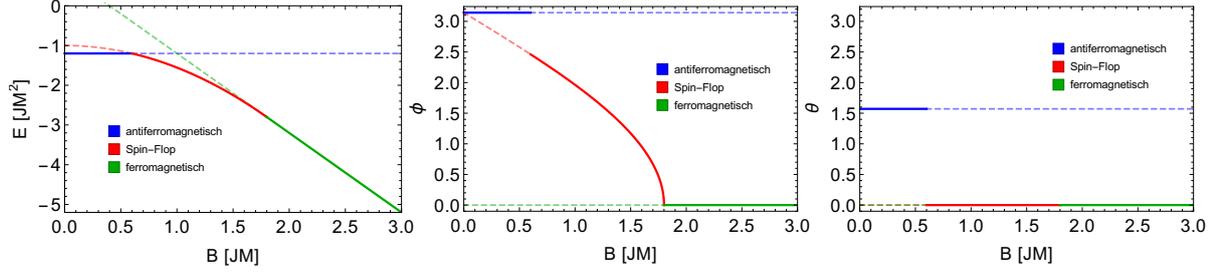


Abbildung 2: Feldabhängigkeit der Energie (links) und der Winkel ϕ (mitte) und θ (rechts) für den Fall $A = 0.1J$.

Für $B = 0$ stellt sich heraus, dass das Energieminimum $E_0 = -(J + 2A)M^2$ bei $\theta = \pi/2$ und $\phi = \pi$ erreicht wird. Für endliches B kann θ aus Symmetriegründen nur die Werte $\pi/2$ und 0 annehmen. Im ersten Fall $\theta = \pi/2$ ist das lokale Minimum immer bei $\phi = \pi$ (die Lösung von $B = 0$), während der zweite Fall $\theta = 0$ zwei Extrema besitzt

$$\phi = 0 \quad \text{und} \quad \phi \equiv \phi_B = 2 \arccos \left[\frac{BM}{2(J - A)M^2} \right] \quad (18)$$

Untersucht man die B -Abhängigkeit der Energien so gilt

$$E_0 \equiv E(\theta = \pi/2, \phi = 0) = -JM^2 - 2AM^2, \quad (19)$$

$$E_1(B) \equiv E(\theta = 0, \phi = 0) = +JM^2 - 2AM^2 - 2BM, \quad (20)$$

$$E_2(B) \equiv E(\theta = 0, \phi = \phi_B) = -JM^2 - B^2/[2(J - A)]. \quad (21)$$

Für kleine B ist wird die Energie immer bei E_0 minimiert. Für den Fall $A \ll J$ finden wir einen ersten Phasenübergang wenn $E_2(B) = E_0$, d.h. bei

$$B_{c1} = JM\sqrt{4(A/J)[1 - (A/J)]}. \quad (22)$$

Oberhalb dieses ersten kritischen Feldes findet ein Spin-Flop statt, wobei θ von $\pi/2$ auf 0 und ϕ von 0 auf $2 \arccos(\sqrt{(A/J)/[1 - A/J]})$ springt. Oberhalb von

$$B_{c2} = 2MJ[1 - (A/J)], \quad (23)$$

wenn $E_1(B) < E_2(B)$ ist, richten sich alle Spins entlang B aus, d.h. $\theta = 0$ und $\phi = 0$. Der Phasenübergang vom Spin-Flop in den Ferromagnetischen Zustand ist kontinuierlich. Für $A = J/2$ gilt $B_{c1} = B_{c2} = B_c \equiv JM$ woraus folgt, dass es für $A > J/2$ keinen Spin-Flop Übergang mehr gibt, da die Anisotropie stark genug ist. Stattdessen springt bei B_c der Grundzustand direkt von einem Antiferromagneten mit $\theta = \pi/2$ und $\phi = \pi$ (E_0) zu einem Ferromagneten $\theta = 0$, $\phi = 0$. Das Verhalten von E , ϕ , und θ ist in den Abbildungen 2 ($A = 0.1J$) und 3 ($A = 2J$) gezeigt.

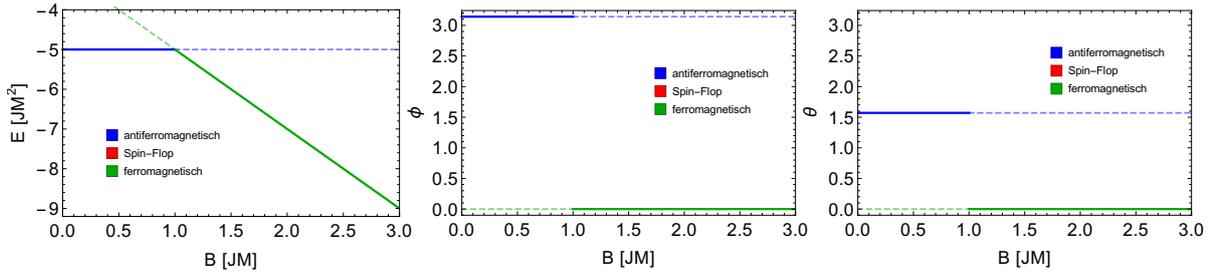
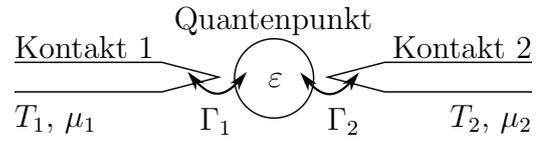


Abbildung 3: Feldabhängigkeit der Energie (links) und der Winkel ϕ (mitte) und θ (rechts) für den Fall $A = 2J$.

3. Strom durch einen Quantenpunkt

(15 + 15 + 15 = 45 Punkte)

In einer elektrischen Nanostruktur sei ein sogenannter “Quantenpunkt” zwischen zwei dünnen Kontakten angeordnet (siehe Skizze). In dem Quantenpunkt steht einem Elektron genau ein Zustand der Energie ε zur Verfügung.



Elektronen dieser Energie können aus beiden Kontakten in den Quantenpunkt (oder umgekehrt) tunneln, nämlich mit den Raten Γ_1, Γ_2 . Die Kontakte haben die Temperaturen T_i und chemischen Potentiale μ_i ($i = 1, 2$). Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die Spinartung und Wechselwirkungen zwischen Elektronen.

- (a) Die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zustand im Quantenpunkt unbesetzt oder besetzt ist, seien p_0 und p_1 . Notieren Sie die Mastergleichung für $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$. Finden Sie die stationäre Lösung für p_0 und p_1 und anhand dieser den elektrischen Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ (Q : el. Ladung) durch den Quantenpunkt im allgemeinen Fall.

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Zustands mit Energie ε im Kontakt i ($i = 1, 2$) ist gegeben durch die Fermiverteilung

$$f_i(\varepsilon) = [e^{\beta_i(\varepsilon - \mu_i)} + 1]^{-1} \quad (24)$$

Der Tunnelprozess eines Elektrons vom Kontakt i in den Quantenpunkt findet nur statt wenn (a) der Quantenpunkt leer ist und (b) ein Elektron im Kontakt bei der Energie verfügbar ist. Somit gilt für die Rate mit welcher ein leerer in einen besetzten Zustand übergeht

$$T_{0 \rightarrow 1} = p_0 \sum_i f_i(\varepsilon) \Gamma_i. \quad (25)$$

Für den umgekehrten Prozess gilt

$$T_{1 \rightarrow 0} = p_1 \sum_i [1 - f_i(\varepsilon)] \Gamma_i. \quad (26)$$

Die Mastergleichung ergibt sich aus

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{0 \rightarrow 1} + T_{1 \rightarrow 0} \\ +T_{0 \rightarrow 1} - T_{1 \rightarrow 0} \end{pmatrix} = \sum_i \Gamma_i \begin{pmatrix} -f_i(\varepsilon) & 1 - f_i(\varepsilon) \\ f_i(\varepsilon) & -[1 - f_i(\varepsilon)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

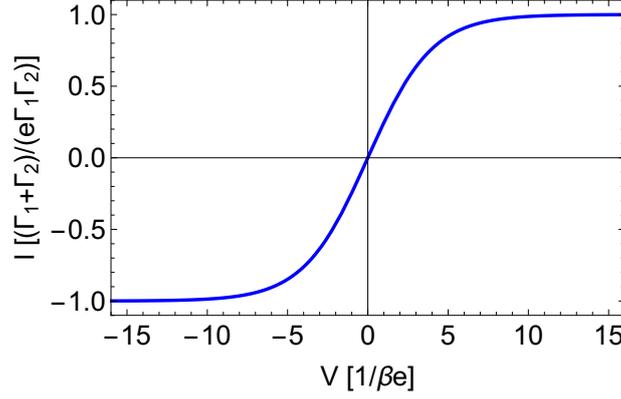


Abbildung 4: IV Charakteristik für den elektrischen Transport durch einen Quantenpunkt.

Für die stationäre Lösung $dp_i/dt = 0$ finden wir $T_{0 \rightarrow 1} = T_{1 \rightarrow 0}$ und mit $p_0 = 1 - p_1$

$$p_0 = \frac{\Gamma_1[1 - f_1(\varepsilon)] + \Gamma_2[1 - f_2(\varepsilon)]}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad \text{und} \quad p_1 = \frac{\Gamma_1 f_1(\varepsilon) + \Gamma_2 f_2(\varepsilon)}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (28)$$

Die stationäre Lösung beschreibt trotzdem ein Nicht-Gleichgewicht bei welchem ein Strom $I = e\Gamma_1\{p_0 f_1(\varepsilon) - p_1[1 - f_1(\varepsilon)]\} = e\Gamma_2\{p_0 f_2(\varepsilon) - p_1[1 - f_2(\varepsilon)]\}$ fließt. Wir finden im stationären Fall

$$I = e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]. \quad (29)$$

- (b) Wir betrachten nun den speziellen Fall $T_1 = T_2 =: T$, $\mu_1 = \varepsilon + \frac{1}{2}eV$, $\mu_2 = \varepsilon - \frac{1}{2}eV$, wobei V eine Spannung ist, die zwischen den Kontakten angelegt wird, und $e < 0$ die Elektronenladung. Skizzieren Sie die I - V -Kennlinie. Welchen maximalen Wert kann der Strom annehmen? In welchem Spannungsbereich findet man näherungsweise ohmsches Verhalten? Wie hängt der ohmsche Widerstand in diesem Bereich von der Temperatur ab?

Lösung: Setzt man die gegebenen Parameter in der Fermi-Verteilung ein so ergibt sich nach einiger Umformung aus Gleichung (29)

$$I = e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \tanh(\beta e V / 4) \quad (30)$$

Die Skizze ist in Abbildung 4 gegeben. Wir finden, dass der Strom durch

$$I_{\max} = e\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2) \quad (31)$$

beschränkt ist, und für $\Gamma_i \gg \Gamma_j$ durch die kleinere Tunnelrate beschränkt ist $I_{\max} \approx e\Gamma_j$. Für ein festes Γ_1 wird der maximale Strom bei $\Gamma_2 = \Gamma_1$ maximiert. Im Bereich $V \ll (\beta e)^{-1}$ ist die Strom-Spannungs-Charakteristik näherungsweise linear mit einem Widerstand

$$R = \frac{V}{I} = \frac{4k_B T (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{e^2 \Gamma_1 \Gamma_2} \quad (32)$$

welcher linear in T anwächst.

- (c) Ohne äußere Spannung können wir den Fall $\mu_1 = \mu_2 =: \mu$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $T_1 > T_2$ untersuchen. Bestimmen Sie den elektrischen Strom und geben Sie explizit an, in welche Richtung sich Elektronen bewegen. Wie hängt der Strom von der Größe $\Delta = \varepsilon - \mu$ ab? Finden Sie eine Näherung für den Strom $I(\delta T, T, \Delta)$ im Fall $\delta T = T_1 - T_2 \ll T \approx T_1 \approx T_2$ sowie $k_B \delta T \ll |\Delta|$ und diskutieren Sie qualitativ das Verhalten des Stromes in Abhängigkeit von T .

Lösung: Einsetzen der gegebenen Parameter liefert

$$I = e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\sinh(\delta\beta\Delta/2)}{\cosh(\beta\Delta/2) + \cosh(\delta\beta\Delta/2)} \quad (33)$$

wobei wir $\beta \equiv (\beta_1 + \beta_2)/2$, $\delta\beta \equiv (\beta_2 - \beta_1)/2 > 0$ und $\Delta = \varepsilon - \mu$ verwendet haben. Das Vorzeichen von Δ bestimmt die Richtung des Stroms: für $\Delta > 0$ fließt der Strom von Kontakt 1 zu Kontakt 2, für $\Delta < 0$ in die andere Richtung. Für grosse $|\Delta|$ (und da $\beta > \delta\beta$) wird der Strom exponentiell unterdrückt

$$I \approx e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sigma(\Delta) e^{-\beta_1 |\Delta|/2}, \quad (34)$$

mit $\sigma(\Delta) = \Delta/|\Delta|$ das Vorzeichen von Δ . Für kleine Temperaturunterschiede finden wir

$$I \approx e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\delta\beta\Delta/2}{\cosh(\beta\Delta/2) + 1} \quad (35)$$

$$= \frac{e\Delta}{4k_B T} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{(\delta T/T)}{\cosh(\Delta/2k_B T) + 1}. \quad (36)$$

Für konstantes $\delta T/T$ verschwindet bei hohen Temperaturen $k_B T \gg \Delta$ der Strom wie T^{-1} :

$$I \approx \frac{e\Delta}{8k_B T} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\delta T/T). \quad (37)$$

Bei kleinen Temperaturen ist der Strom exponentiell unterdrückt und nur durch thermische Aktivierung (Arrhenius'sches Gesetz) über eine Barriere Δ möglich

$$I \approx \frac{e\Delta}{8k_B T} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\delta T/T) e^{-|\Delta|/2k_B T}. \quad (38)$$