Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb)   Sommersemester 2019

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex

Lösungen 2. Klausur, 07.10.2019
Bewertungsgrundlage

---

1. Übernächste Nachbarn im Heisenberg-Modell (10+15+15 = 40 Punkte)

Betrachten Sie das Heisenberg-Modell aus $N \gg 1$ Spins mit $S \geq 1/2$ in einem dreidimensionalen kubischen Gitter mit Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn als auch zwischen übernächsten Nachbarn (d.h. die 12 Gitterplätze mit dem zweitkürzesten räumlichen Abstand). Der Hamilton-Operator lautet dann:

$$H = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \, .$$

Dabei sei $J_1 > J_2 > 0$ und wir bezeichnen mit $\langle ij \rangle$ Paare nächster Nachbarn im Gitter sowie mit $\langle\langle ij \rangle\rangle$ Paare übernächster Nachbarn. Beachten Sie, dass $\vec{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ ein quantenmechanischer Operator mit $\vec{s}_i^{\,2} = S(S+1)$ ist.

(a) Führen Sie die Molekularfeld-Näherung durch und bringen Sie den genäherten Hamilton-Operator auf die Form

$$H \simeq H_{\mathrm{MF}} = -\vec{B}_{\mathrm{eff}} \cdot \sum_i \vec{s}_i + E_0 \, .$$

Bestimmen Sie das molekulare Feld $\vec{B}_{\mathrm{eff}}$ sowie die Konstante E_0 in Abhängigkeit vom mittleren Spin $\langle \vec{s} \rangle$. Geben Sie die Zustandssumme Z_{MF} für H_{MF} an.

Hinweis: Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass $\vec{B}_{\mathrm{eff}}$ in z-Richtung zeigt.

(b) Leiten Sie die Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung M her. Finden Sie die Übergangstemperatur T_c in der Molekularfeld-Näherung.

Hinweis: $\dfrac{d}{dx}\coth(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2(x)}, \qquad \dfrac{1}{\sinh^2(x)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)$

(c) Ausgehend von H_{MF} leiten Sie das Freie-Energiedichte-Funktional

$$f(\varphi) = f_N + \frac{t}{2}\varphi^2 + b\,\varphi^4$$

für das System in der Nähe des Übergangs her. Bestimmen Sie f_N, t und b (numerische Faktoren müssen nicht vereinfacht werden).

Hinweis:

$$\ln \frac{\sinh(Ax)}{\sinh(x)} = \ln A + \frac{1}{6}\left(A^2 - 1\right)x^2 + \frac{1}{180}\left(1 - A^4\right)x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Lösung

(a) In der Molekularfeldnäherung gilt für den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H \approx H_{\mathrm{MF}} =& - J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \left(\langle \vec{s}_i \rangle \cdot \vec{s}_j + \vec{s}_i \cdot \langle \vec{s}_j \rangle - \langle \vec{s}_i \rangle \cdot \langle \vec{s}_j \rangle \right) \\ & - J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \left(\langle \vec{s}_i \rangle \cdot \vec{s}_j + \vec{s}_i \cdot \langle \vec{s}_j \rangle - \langle \vec{s}_i \rangle \cdot \langle \vec{s}_j \rangle \right) & \textbf{(1 P)} \\ =& - (J_1 z_1 + J_2 z_2) \sum_i \left(\langle \vec{s} \rangle \cdot \vec{s}_i - \frac{1}{2} \langle \vec{s} \rangle^2 \right) & \textbf{(1 P)} \\ =& - \vec{B}_{\mathrm{eff}} \cdot \sum_i \vec{s}_i + E_0 \\ \text{mit} \quad \vec{B}_{\mathrm{eff}} =& \left(J_1 z_1 + J_2 z_2 \right) \langle \vec{s} \rangle \,, & \textbf{(1 P)} \\ E_0 =& \frac{1}{2} N \left(J_1 z_1 + J_2 z_2 \right) \langle \vec{s} \rangle^2 \,. & \textbf{(1 P)} \end{aligned}$$

Hierbei ist $z_1 = 6$ die Koordinationszahl für nächste Nachbarn im kubischen Gitter, während $z_2 = 12$ die Koordinationszahl der übernächsten Nachbarn ist. In geeigneten Koordinaten gilt $\vec{B}_{\mathrm{eff}} = (J_1 z_1 + J_2 z_2) \langle s^z \rangle \vec{e}_z$ und $H_{\mathrm{MF}} = -B_{\mathrm{eff}} \sum_i s_i^z + E_0$. **(1 P)**
Für die Zustandssumme verwenden wir, dass für jeden Spin s_i^z die Werte $-S, -S+1, \ldots, S-1, S$ annehmen kann: **(1 P)**

$$Z_{\mathrm{MF}} \overset{\textbf{(1 P)}}{=} \sum_{\{\vec{s}_i\}} e^{-\beta H_{\mathrm{MF}}} \overset{\textbf{(1 P)}}{=} e^{-\beta E_0} \prod_{i=1}^{N} \sum_{m=-S}^{S} e^{\beta m B_{\mathrm{eff}}} =: e^{-\beta E_0} Z_1^N$$

Dabei gilt für die Ein-Spin-Zustandssumme:

$$Z_1 = e^{-\beta S B_{\mathrm{eff}}} \sum_{j=0}^{2S} \left[e^{\beta B_{\mathrm{eff}}} \right]^j \overset{\textbf{(1 P)}}{=} e^{-\beta S B_{\mathrm{eff}}} \frac{e^{(2S+1)\beta B_{\mathrm{eff}}} - 1}{e^{\beta B_{\mathrm{eff}}} - 1} \overset{\textbf{(1 P)}}{=} \frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(2S+1)\beta B_{\mathrm{eff}}\right]}{\sinh\left(\frac{1}{2}\beta B_{\mathrm{eff}}\right)}$$

(b) Für jeden einzelnen Spin lautet der Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle s^z \rangle =& \frac{1}{Z_1} \sum_{m=-S}^{S} m e^{\beta m B_{\mathrm{eff}}} = \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial (\beta B_{\mathrm{eff}})} & \textbf{(1 P)} \\ =& \frac{2S+1}{2} \coth\left(\frac{2S+1}{2} \beta B_{\mathrm{eff}} \right) - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2} \beta B_{\mathrm{eff}} \right) & \textbf{(3 P)} \end{aligned}$$

Mit der Magnetisierung $M = N \langle s^z \rangle$ gilt $B_{\mathrm{eff}} = (J_1 z_1 + J_2 z_2) M/N$. Somit folgt die Selbstkonsistenzgleichung für M:

$$\frac{M}{N} = \frac{2S+1}{2} \coth\left(\frac{2S+1}{2N} \beta (J_1 z_1 + J_2 z_2) M \right) - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2N} \beta (J_1 z_1 + J_2 z_2) M \right)$$

(1 P)

Um die kritische Temperatur zu finden, untersuchen wir, für welche Temperaturen Lösungen der Selbstkonsistenzgleichung mit $M \neq 0$ existieren. **(1 P)**
Mit $x := \beta (J_1 z_1 + J_2 z_2) M/(2N)$ lautet die Gleichung

$$x = \frac{1}{4} \beta (J_1 z_1 + J_2 z_2) g(x). \qquad \textbf{(1 P)}$$

Dabei haben wir die Funktion $g(x) = A\coth(Ax) - \coth(x)$ mit $A = 2S+1$ eingeführt. Die Existenz von Lösungen außer der Triviallösung $x = 0$ kann mithilfe der ersten Ableitung beider Seiten der Gleichung an $x = 0$ diskutiert werden:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dx}x\right|_{x=0} &= 1 \\
\left.\frac{d}{dx}g(x)\right|_{x=0} &= \left[-\frac{A^2}{\sinh^2(Ax)} + \frac{1}{\sinh^2 x}\right]_{x=0} \\
&= \left[-\frac{A^2}{(Ax)^2} + \frac{A^2}{3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)\right]_{x=0} \\
&= \frac{1}{3}\left(A^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left.\frac{d}{dx}\frac{1}{4}\beta\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right) g(x)\right|_{x=0} = \frac{(2S+1)^2 - 1}{12}\beta\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right) \qquad \textbf{(5 P)}
$$

Nur wenn die Ableitung der rechten Seite der Selbstkonsistenzgleichung an $x = 0$ größer ist als 1, existiert eine Lösung der Selbstkonsistenzgleichung mit $x \neq 0$ (denn $g(x)$ ist eine konkave Funktion). Genau an der kritischen Temperatur ist die Ableitung gleich 1: **(1 P)**

$$
\begin{aligned}
1 =& \frac{(2S+1)^2 - 1}{12}\frac{\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)}{k_B T_c} \\
T_c =& \frac{2}{k_B} S(S+1)\left(J_1 + 2J_2\right) \qquad \textbf{(2 P)}
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wurde $z_1 = 6$ und $z_2 = 12$ eingesetzt.

(c) Mit der Zustandssumme aus (a) und dem Ordnungsparameter $\varphi \overset{\textbf{(1 P)}}{=} \langle s^z \rangle$ erhält man die freie Energie

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{MF}} =& -\frac{1}{\beta}\ln Z_{\mathrm{MF}} = E_0 - \frac{N}{\beta}\ln Z_1 \qquad \textbf{(1 P)} \\
=& \frac{1}{2}N\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)\varphi^2 - \frac{N}{\beta}\ln\frac{\sinh\left[\frac{2S+1}{2}\beta\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)\varphi\right]}{\sinh\left[\frac{1}{2}\beta\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)\varphi\right]} \qquad \textbf{(1 P)} \\
\approx& \frac{1}{2}N\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)\varphi^2 - \frac{N}{\beta}\left[\ln(2S+1) + \frac{S(S+1)\beta^2}{6}\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)^2\varphi^2\right. \\
&\left. + \frac{1-(2S+1)^4}{180}\frac{\beta^4}{16}\left(J_1 z_1 + J_2 z_2\right)^4\varphi^4\right] \qquad \textbf{(4 P)}
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich mit $F/N = f(\varphi) = f_N + (t/2)\varphi^2 + b\varphi^4$ ergibt sich nahe des Übergangs [d.h. $|T - T_c| \ll T_c$ mit T_c aus (b)]: **(1 P)**

$$
\begin{aligned}
f_N &\overset{\textbf{(2P)}}{=} -k_B T_c \ln(2S+1) = -2\left(J_1 + 2J_2\right) S(S+1)\ln(2S+1) \\
t &\overset{\textbf{(1P)}}{=} 6(J_1 + 2J_2) - \frac{12}{k_B T}(J_1 + 2J_2)^2 S(S+1) \overset{\textbf{(2P)}}{=} 6(J_1 + 2J_2)\frac{T - T_c}{T_c} \\
b &\overset{\textbf{(2P)}}{=} \frac{6^4}{180 \times 16}\left[(2S+1)^4 - 1\right]\frac{(J_1 + 2J_2)^4}{(k_B T_c)^3} = \frac{6^4(J_1 + 2J_2)}{180 \times 16 \times 8}\frac{(2S+1)^4 - 1}{S^3(S+1)^3}
\end{aligned}
$$

2. Transfermatrixmethode im dimerisierten 1D-Ising-Modell (30 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell für $2N$ Spins ($S = 1/2$) auf einem Ring ($s^z_{2N+1} = s^z_1$) mit einer "Dimerisierung" der Kette, d.h. die Bindungen werden alternierend geschwächt und gestärkt:

$$H = -J_- \sum_{i=1}^{N} s^z_{2i-1} s^z_{2i} - J_+ \sum_{i=1}^{N} s^z_{2i} s^z_{2i+1}.$$

Nehmen Sie an, dass $J_+ > J_- > 0$. Führen Sie alternierende Transfermatrizen $\mathcal{T}_+$ und $\mathcal{T}_-$ ein und bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z. Berechnen Sie für $N \to \infty$ die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2$ (wobei $\sigma_i = 2s^z_i$). Dabei seien sowohl i als auch n ungerade und $n \ll N$.

Hinweis: Bei der Berechnung der Korrelationsfunktion ist es nützlich in der Eigenbasis von $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \mathcal{T}_+$ zu arbeiten, in der σ_z und $\mathcal{T}_z := \mathcal{T}_- \sigma_z \mathcal{T}_+$ nur Nicht-Diagonalen-Elemente haben.

Lösung:

Für die Spins im Ising-Modell gilt $s^z_i \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. **(1 P)**
Damit haben wir die kanonische Zustandssumme:

$$Z = \mathrm{Tr}\big(e^{-\beta H}\big) = \sum_{s^z_1 = \pm\frac{1}{2}} \cdots \sum_{s^z_{2N} = \pm\frac{1}{2}} e^{-\beta H(\{s^z_i\})} \qquad \textbf{(1 P)}$$

$$= \sum_{s^z_1 = \pm\frac{1}{2}} \cdots \sum_{s^z_{2N} = \pm\frac{1}{2}} e^{\beta J_- s^z_1 s^z_2}\, e^{\beta J_+ s^z_2 s^z_3} \ldots e^{\beta J_- s^z_{2N-1} s^z_{2N}}\, e^{\beta J_+ s^z_{2N} s^z_1} \qquad \textbf{(2 P)}$$

Nun führen wir die Transfermatrizen $\mathcal{T}_\pm$ ein:

$$\mathcal{T}_\pm = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\beta J_\pm}{4}\right) & \exp\left(-\frac{\beta J_\pm}{4}\right) \\ \exp\left(-\frac{\beta J_\pm}{4}\right) & \exp\left(\frac{\beta J_\pm}{4}\right) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2 P)}$$

Damit hat die Zustandssumme die Form

$$Z = \sum_{\{s^z_i\}} \left[(\mathcal{T}_-)_{s^z_1 s^z_2} (\mathcal{T}_+)_{s^z_2 s^z_3}\right] \left[(\mathcal{T}_-)_{s^z_3 s^z_4} (\mathcal{T}_+)_{s^z_4 s^z_5}\right] \ldots . \qquad \textbf{(2 P)}$$

Wir definieren $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$, $J_2 = \frac{1}{2}(J_+ - J_-)$ und

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_- \mathcal{T}_+ = 2 \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right) & \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right) \\ \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right) & \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2 P)}$$

Dann erhält man unter Ausnutzung der zyklischen Randbedingung:

$$Z = \mathrm{tr}\left[\mathcal{T}^N\right]. \qquad \textbf{(1 P)}$$

Diese Spur berechnen wir durch Diagonalisierung von $\mathcal{T}$. Das charakteristische Polynom

$$\det\left(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{1}\right) = 0$$

liefert die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 2\left[\cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right) \pm \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right)\right] \qquad \textbf{(2 P)}$$

Für $N \to \infty$ dominiert der größere Eigenwert ($\lambda_1^N \gg \lambda_2^N$), somit **(1 P)**

$$Z = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{T}^N\right] = \lambda_1^N + \lambda_2^N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2^N\left[\cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right) + \cosh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right)\right]^N . \qquad \textbf{(1 P)}$$

Für die Korrelationsfunktion gilt ($\sigma_i = 2s_i^z$)

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{\{\sigma_j\}} \sigma_i\sigma_{i+n}e^{-\beta H} . \qquad \textbf{(1 P)}$$

Da σ_i nur die Werte ±1 annehmen kann, können diese durch die Diagonalelemente der Pauli-Matrix σ_z dargestellt werden. Dann erhält man im Fall i, n ungerade

$$\begin{aligned}\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle =& \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{T}^{\frac{i-1}{2}}\sigma_z\mathcal{T}^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{T}_-\sigma_z\mathcal{T}_+\mathcal{T}^{N-\frac{i+n}{2}}\right] \qquad \textbf{(2 P)}\\ =& \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{T}^{N-\frac{n-1}{2}}\sigma_z\mathcal{T}^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{T}_-\sigma_z\mathcal{T}_+\right] .\end{aligned}$$

Es entsteht die Matrix

$$\mathcal{T}_z = \mathcal{T}_-\sigma_z\mathcal{T}_+ = 2\begin{pmatrix}\sinh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right) & -\sinh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right)\\ \sinh\left(\frac{1}{2}\beta J_2\right) & -\sinh\left(\frac{1}{2}\beta J_1\right)\end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun die Spur in $\left\langle\sigma_i^z\sigma_{i+n}^z\right\rangle$ in der Eigenbasis $(|1\rangle, |2\rangle)$ von $\mathcal{T}$,

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} , \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} . \qquad \textbf{(1 P)}$$

In dieser Basis gilt

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \mathcal{T}_z &= 2\begin{pmatrix}0 & \sinh\frac{\beta J_1}{2} + \sinh\frac{\beta J_2}{2}\\ \sinh\frac{\beta J_1}{2} - \sinh\frac{\beta J_2}{2} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle =& \frac{1}{Z}\sum_{l,l',l'',l'''=1,2} \langle l|\,\mathcal{T}^{N-\frac{n-1}{2}}\,|l'\rangle\,\langle l'|\,\sigma_z\,|l''\rangle\,\langle l''|\,\mathcal{T}^{\frac{n-1}{2}}\,|l'''\rangle\,\langle l'''|\,\mathcal{T}_z\,|l\rangle \qquad \textbf{(1 P)}\\ =& \frac{1}{Z}\sum_{l,l',l'',l'''=1,2} \delta_{l,l'}\lambda_l^{N-\frac{n-1}{2}}\left(1-\delta_{l',l''}\right)\delta_{l'',l'''}\lambda_{l''}^{\frac{n-1}{2}}\\ & 2\left(1-\delta_{l''',l}\right)\left(\sinh\frac{\beta J_1}{2} + (-1)^l\sinh\frac{\beta J_2}{2}\right) \qquad \textbf{(4 P)}\\ =& \frac{1}{Z}\sum_{l,l''=1,2} \lambda_l^{N-\frac{n-1}{2}}\lambda_{l''}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\delta_{l,l''}\right)\left(\sinh\frac{\beta J_1}{2} + (-1)^l\sinh\frac{\beta J_2}{2}\right) \qquad \textbf{(1 P)}\\ =& 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\sinh\frac{\beta J_1}{2} + \sinh\frac{\beta J_2}{2}\right) + 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{N-\frac{n-1}{2}}\left(\sinh\frac{\beta J_1}{2} - \sinh\frac{\beta J_2}{2}\right)\\ & \qquad \textbf{(1 P)}\end{aligned}$$

Der zweite Term ist im Fall $N \gg n$ vernachlässigbar **(1 P)** (für Z selbst wurde in der letzten Zeile bereits das Resultat für große N verwendet). Außerdem zeigt eine analoge Rechnung, dass $\langle\sigma_i\rangle^2 = 0$ **(2 P)**. Insgesamt lautet der gesuchte Korrelator also

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle - \langle\sigma_i\rangle^2 = 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\sinh\frac{\beta J_1}{2} + \sinh\frac{\beta J_2}{2}\right) \qquad \textbf{(1 P)}$$

3. RC-Schaltung mit Rauschen (15+15=30 Punkte)

Eine Parallelschaltung aus einem elektrischen Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C lässt sich mit der Langevin-Gleichung

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = \delta I(t)$$

beschreiben, wobei $\langle\delta I(t)\rangle = 0$ und $\langle\delta I(t)\delta I(t')\rangle = \dfrac{2k_BT}{R}\delta(t-t')$. Es handelt sich somit um Nyquist-Rauschen.

(a) Führen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung $\rho(V,t)$ ein und leiten Sie die Fokker-Planck-Gleichung für ρ aus der Langevin-Gleichung her.

(b) Lösen Sie die Fokker-Planck-Gleichung im stationären Fall.

Hinweis: Die Differentialgleichung kann auf 1. Ordnung reduziert werden. Beachten Sie, dass aus Symmetriegründen $\rho(V) = \rho(-V)$ und damit $\frac{d\rho}{dV}\big|_{V=0} = 0$. Danach kann die Substitution $y = V^2$ hilfreich sein.

Lösung

(a) Die Fokker-Planck-Gleichung für $\rho(V,t)$ hat die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(V,t) = -\frac{\partial}{\partial V}\left[\alpha^{(1)}(V,t)\rho(V,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}\left[\alpha^{(2)}(V,t)\rho(V,t)\right] . \qquad \textbf{(2 P)}$$

Um die Momente $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ aus der Langevingleichung herzuleiten, integrieren wir diese zunächst über ein kurzes Zeitintervall

$$V(t+\Delta t) - V(t) = -\frac{V}{RC}\Delta t + \frac{1}{C}\int_t^{t+\Delta t} dt'\delta I(t') \qquad \textbf{(2 P)}$$

und erhalten damit, wie in der Vorlesung gezeigt wurde,

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)}(V,t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle V(t+\Delta t) - V(t)\rangle && \textbf{(1 P)}\\
&= -\frac{V}{RC} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{C\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\underbrace{\langle\delta I(t')\rangle}_{=0} && \textbf{(2 P)}\\
&= -\frac{V}{RC} && \textbf{(1 P)}
\end{aligned}$$

sowie

$$\alpha^{(2)}(V,t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\langle [V(t+\Delta t) - V(t)]^2 \right\rangle \qquad \textbf{(1 P)}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\mathcal{O}(\Delta t^2) - \frac{2V\Delta t}{RC}\int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \delta I(t')\rangle \right.$$

$$\left. + \frac{1}{C^2}\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' \langle \delta I(t')\delta I(t'')\rangle \right] \qquad \textbf{(3 P)}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{C^2\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{2k_BT}{R} \qquad \textbf{(1 P)}$$

$$= \frac{2k_BT}{RC^2} \qquad \textbf{(1 P)}$$

Durch Einsetzen von $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ in die Fokker-Planck-Gleichung folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(V,t) = \frac{1}{RC}\left[\frac{k_BT}{C}\frac{\partial^2 \rho(V,t)}{\partial V^2} + \frac{\partial}{\partial V}\left[V\rho(V,t)\right]\right] \qquad \textbf{(1 P)}$$

(b) Im stationären Fall gilt

$$0 = \frac{k_BT}{C}\frac{\partial^2 \rho(V)}{\partial V^2} + \frac{\partial}{\partial V}\left[V\rho(V)\right] \qquad \textbf{(2 P)}$$

woraus zunächst mittels Integration $\int_{V_0}^{V} dV'$ eine Differentialgleichung erster Ordnung resultiert:

$$0 = \frac{k_BT}{C}\frac{\partial \rho(V)}{\partial V} + V\rho(V) \qquad \textbf{(2 P)}$$

Die Integrationskonstante (linke Seite) ist proportional zur Ableitung an $V = 0$ und ist daher Null (siehe Hinweis). **(1 P)**

Man kann nun entweder unmittelbar einen geeigneten Ansatz erraten oder noch die angegebene Substitution $y = V^2$ ausführen:

$$0 = \sqrt{y}\left[\frac{2k_BT}{C}\frac{\partial \rho(y)}{\partial y} + \rho(y)\right] \qquad \textbf{(3 P)}$$

Der Ausdruck in Klammern verschwindet, wenn

$$\rho(y) = \mathcal{K}\exp\left(-\frac{Cy}{2k_BT}\right) \qquad \textbf{(2 P)}$$

mit einer Konstante $\mathcal{K}$, also

$$\rho(V) = \mathcal{K}\exp\left(-\frac{CV^2}{2k_BT}\right) \qquad \textbf{(2 P)}$$

wobei $\mathcal{K}$ aus der Normierungsbedingung folgt:

$$\mathcal{K} \stackrel{!}{=} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dV\rho(V)\right]^{-1} = \sqrt{\frac{C}{2\pi k_BT}} \qquad \textbf{(3 P)}$$

Wie aus der Vorlesung bekannt, ist die stationäre Lösung also von der Form einer Maxwell-Verteilung.