

## Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman  
Dr. B. NarozhnyBlatt 10  
Besprechung 01.07.2011

## 1. Die zweite Quantisierung. Bose-Statistik. (10 Punkte)

In dieser Übung betrachten Sie ein System aus  $N$  nichtwechselwirkenden Bosonen (ohne Spin) im Grundzustand. Das System habe ein Volumen  $V$ .

In der Vorlesung haben Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kennengelernt. Der Operator  $\hat{a}_i^\dagger$  vergrößert die Zahl der Teilchen im  $i$ -ten Zustand um 1. Den Operator  $\hat{a}_i$  vermindert die Zahl der Teilchen im  $i$ -ten Zustand um 1. Man kann auch die Feldoperatoren einführen:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}; \quad \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger.$$

Der Operator  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  erzeugt ein Teilchen im Punkte  $\mathbf{r}$ . Der Dichte-Operator kann man durch die Feldoperatoren ausdrücken:

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}),$$

Bestimmen Sie jetzt:

- (a) den Mittelwert der Teilchendichte  $\bar{n}$ , (1 Punkt)
- (b) den Mittelwert der Teilchenzahl  $\bar{N}'$  in einem bestimmten Volumen  $V' < V$ , (1 Punkt)
- (c) die Varianz von  $\bar{N}'$ , (1 Punkt)

*Hinweis:* Benutzen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Raum der Besetzungszahlen. Drücken Sie die physikalische Größe durch die Operatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$  aus und berechnen Sie die Mittelwerte im Grundzustand.

- (d) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\bar{n}} \left( \overline{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} - \bar{n}^2 \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

wobei  $n(\mathbf{r}_j)$  die Teilchendichte im Ort  $\mathbf{r}_j$  und  $\bar{n}$  der Mittelwert der Teilchendichte ist. (4 Punkte)

- (e) Vergleichen Sie das Ergebnis von (d) mit dem entsprechenden Ergebnis für ein System aus  $N$  klassischen nichtwechselwirkenden Teilchen. (3 Punkte)

**2. Die zweite Quantisierung. Fermi-Statistik.** (10 Punkte)

In dieser Übung betrachten Sie ein System aus  $N$  nichtwechselwirkenden Fermionen im Grundzustand. Das System findet sich im Volumen  $V$ . Der Dichte-Operator drückt man durch die Feldoperatoren gleich als im Fall der Bosonen aus.

Bestimmen Sie jetzt:

- (a) den Mittelwert der Teilchendichte  $\bar{n}$ , (1 Punkt)
- (b) den Mittelwert der Teilchenzahl  $\bar{N}'$  in einem bestimmten Volumen  $V' < V$ , (1 Punkt)

*Hinweis:* Benutzen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Raum der Besetzungszahlen. Drücken Sie die physikalische Größe durch die Operatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$  aus und berechnen Sie die Mittelwerte im Grundzustand.

- (c) Berechnen Sie die Korrelation der Teilchendichte für Teilchen mit gegebenen Werten der  $z$ -Komponente des Spins

$$\overline{n(\mathbf{r}_1, s_{z1})n(\mathbf{r}_2, s_{z2})},$$

wobei  $n(\mathbf{r}_j, s_{zj})$  die Dichte von Teilchen im Ort  $\mathbf{r}_j$  mit  $z$ -Komponente des Spins  $s_{zj}$  ist. (4 Punkte)

- (d) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\bar{n}} \left( \overline{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} - \bar{n}^2 \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

wobei  $n(\mathbf{r}_j)$  die Teilchendichte im Ort  $\mathbf{r}_j$  und  $\bar{n}$  der Mittelwert der Teilchendichte ist. (4 Punkte)