Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 3
Besprechung 6.5.2011

---

1. Gaußverteilung für mehrere Variablen:

Die Gaußverteilung $\rho(\xi_1,\ldots,\xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1,\ldots\xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1,\ldots,\xi_M)=\sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\xi_i A_{ij}\xi_j\right) \tag{1}$$

Da ρ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss diese normiert sein, d.h.

$$\int d\xi_1\ldots d\xi_M\,\rho(\xi_1,\ldots,\xi_M)=1.$$

Die Matrix A muss symmetrisch und positiv definit sein. Es ist hilfreich, die Inverse der Matrix A_{ij} einzuführen: $G_{ij}=[A^{-1}]_{ij}$. Aus $A_{ij}=A_{ji}$ folgt dann auch $G_{ij}=G_{ji}$.

Berechnen Sie die folgenden Größen:

(a) den Mittelwert (1 Punkt)

$$\langle\xi_i\rangle=\int d\xi_1\ldots d\xi_M\xi_i\rho(\xi_1,\ldots,\xi_M),$$

(b) die Standardabweichung (1 Punkt)

$$\langle\xi_i^2\rangle-\langle\xi_i\rangle^2,$$

(c) den Korrelator (1 Punkt)

$$\langle\xi_i\xi_j\rangle,$$

(d) (2 Punkt)

$$\left\langle\exp\left(i\beta\sum_{k=1}^{M}\xi_k\right)\right\rangle.$$

Hinweis: Führen Sie dann eine quadratische Ergänzung durch (β sei eine reelle Konstante).

Betrachten wir nun eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0,\tau]$. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ durch

$$\rho(\{\xi(t)\})\sim\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\,\xi(t)g^{-1}(t-t')\xi(t')\right). \tag{2}$$

gegeben ist.

(e) Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt. Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (1). (3 Punkte)

(f) Berechnen Sie den Mittelwert (2 Punkte)

$$\left\langle \exp\left(i \int_0^\tau dt\, \xi(t) \right) \right\rangle , \tag{3}$$

indem Sie die diskretisierte Version benutzen und danach das Ergebnis wieder durch kontinuierliche Integrale ausdrücken.

(g) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t-t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung? (5 Punkte)

2. Stationäre Lösung der Liouville-Gleichung: (2 Punkte)

Betrachten Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, wobei $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ ein Vektor im Phasenraum ist. Zeigen Sie nun mit Hilfe der klassischen Liouville-Gleichung, dass eine Gibbs-Verteilung ρ, die nur über die Energie von $\boldsymbol{x}$ abhängt, stationär ist,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho\big(H(\boldsymbol{x})\big) = 0 \ .$$

3. Dichtematrix für den Spin-1/2: (8 Punkte)

Für einen Spin-1/2 kann man die Dichtematrix durch den Polarisationsvector $\mathbf{P}$ ausdrücken:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\mathbf{P}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass wenn $|\mathbf{P}| = 1$, dann ist der Spin in einem reinen Zustand, der mit der folgenden Wellenfunktion dargestellt werden kann:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix} .$$

Die zwei Winkel legen die Richtung von $\mathbf{P}$ fest:

$$\mathbf{P} = |\mathbf{P}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

(b) Betrachten Sie jetzt ein System, das aus zwei Spin-1/2-Teilchen besteht. Berechnen Sie nun für alle vier Quantenzustände des Gesamtsystems $|S, S^z\rangle$, wobei $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, die reduzierte Dichtematrix des Teilchens 1:

$$\hat{\rho}_1 = \mathrm{Tr}_2 \hat{\rho} = \sum_{s_2^z} \langle s_2^z | \hat{\rho} | s_2^z \rangle ,$$

wobei $\hat{\rho}$ die Dichtematrix des Gesamtsystems ist. In welchen der vier Zustände befindet sich das Teilchen 1 in einem reinen Zustand?

Hinweis: Die Dichtematrix des Gesamtsystems ist durch

$$\hat{\rho} = |S, S^z\rangle\langle S, S^z|$$

gegeben.

(c) Berechnen Sie für alle vier Zustände die von-Neumann-Entropie des Teilchens 1

$$S[\hat{\rho}_1] = -k_B \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_1 \ln \hat{\rho}_1].$$