

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 6
Besprechung 27.05.2011**1. Zustandsdichte in niedrigen Dimensionen:** (2 + 2 = 4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Zustandsdichte des idealen Fermi-Gases kennengelernt. Berechnen Sie nun die Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

des freien Teilchens für niedrigen Dimensionen $d = 1, 2$.

2. Besetzungszahlen in einem idealen Fermi-Gas: (2 + 2 + 4 = 6 Punkte)

Wir bezeichnen mit n_λ die Zahl der Teilchen im Gas, die sich im Quantenzustand λ befinden. Für ein ideales Fermi-Gas zeigen Sie dass

(a)

$$\langle n_\lambda^2 \rangle = \langle n_\lambda \rangle,$$

(b)

$$\langle n_{\lambda_1} n_{\lambda_2} \rangle = \langle n_{\lambda_1} \rangle \langle n_{\lambda_2} \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Schwankung der Gesamtteilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ und zeigen Sie dass

$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \leq \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}; \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \rightarrow 0 \quad (\text{für } T \rightarrow 0).$$

3. Thermodynamik des idealen Fermi-Gases:

Betrachten Sie das ideale Fermi-Gas bei $T = 0$. Berechnen Sie (als Funktion vom Fermi-Impuls p_F):

(a) die Gesamtteilchenzahl N , (2 Punkte)(b) die innere Energie U . (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt das Großkanonische Potential Ω im Limes $T \rightarrow 0$.

- (c) Berechnen Sie $\Omega(T, V, \mu)$ direkt. (2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Zustandsdichte $\nu(\epsilon)$ und zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, dass

$$\Omega = -V \int_0^{\infty} d\epsilon a(\epsilon) n_F(\epsilon), \quad a(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} d\epsilon' \nu(\epsilon').$$

Den Grenzwert von Ω im Limes $T \rightarrow 0$ soll man nach der partiellen Integration berechnen.

- (d) Verwenden Sie die erhaltenen Werte von Ω , U und N und überprüfen Sie, dass gilt (2 Punkte)

$$\Omega = U - TS - \mu N.$$

- (e) Berechnen Sie den Druck des idealen Fermi-Gases bei $T = 0$. (2 Punkte)

Hinweis:

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu}.$$