Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag zu Blatt 1
15.4.2009

---

1. Integrabilitätsbedingung:

(a)

$$
\begin{aligned}
f &= 3x^2 - 2xy - y^2 & \qquad g &= -x^2 - 2xy + y^2 \\
\partial_y f &= -2x - 2y & \qquad \partial_x g &= -2x - 2y
\end{aligned}
$$

Also gilt: $\partial_y f = \partial_x g$, $\Rightarrow \omega$ ist integrabel.

Herleitung von $h(x, y)$:

1. Suche $F(x, y)$ mit $\partial_x F = f$
2. Bestimme $\varphi(y)$, so dass $\partial_y \varphi = g - \partial_y F$
3. $h(x, y) = F(x, y) + \varphi(y)$

$$
\text{Hier:} \qquad F(x, y) = x^3 - x^2 y - y^2 x \quad \Rightarrow \quad \partial_y F = -x^2 - 2xy
$$

$$
\partial_y \varphi = y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{1}{3} y^3
$$

$$
\Rightarrow \boxed{h(x, y) = x^3 - x^2 y - y^2 x + \frac{1}{3} y^3}
$$

(b)

$$
f = 3x + y \ \Rightarrow \ \partial_y f = 1 \quad \text{und} \quad g = -x - 3y \ \Rightarrow \ \partial_x g = -1
$$

Also

$$
\partial_y f \neq \partial_x g, \quad \Rightarrow \quad \omega \ \underline{\text{ist nicht integrabel.}}
$$

Suche integrierenden Faktor:

$$
\partial_y(\alpha f) = f \partial_y \alpha + \alpha \overset{!}{=} \partial_x(\alpha g) = g \partial_x \alpha - \alpha \quad \longrightarrow \quad 3x \partial_y \alpha + y \partial_y \alpha + x \partial_x \alpha + 3y \partial_x \alpha + 2\alpha = 0
$$

$$
\alpha = Ax + By, \quad \partial_y \alpha = B, \quad \partial_x \alpha = A \quad \Rightarrow \quad (3x + y)B + (x + 3y)A + 2Ax + 2By = 0
$$

$$
3B + 3A = 0, \quad A = -B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = x - y} \quad \text{(bis auf Vorfaktor).}
$$

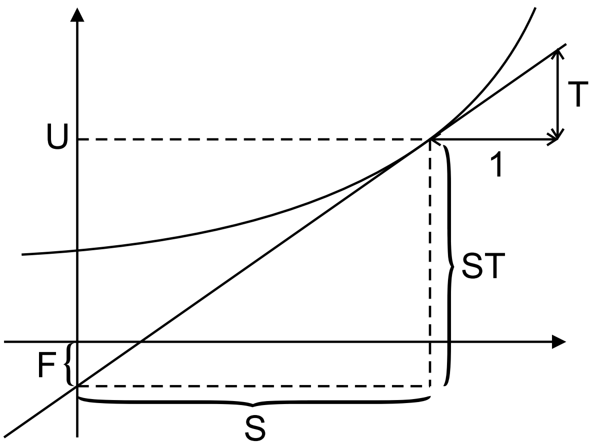
Suche h mit $dh = (x - y)\omega$:

$$
\left.
\begin{aligned}
\partial_x F(x, y) &= (x - y) f = (x - y)(3x + y) & \Rightarrow \ & F(x, y) = x^3 - x^2 y - xy^2 \\
\partial_y \varphi(y) &= (x - y)(-x - 3y) + x^2 + 2xy = 3y^2 & \Rightarrow \ & \varphi(y) = y^3
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{h(x, y) = x^3 - x^2 y - xy^2 + y^3}
$$

2. Legendretransformation:

(a)



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{U-F=ST}}$

$U = U(S)$, Steigung $T = \frac{\partial U}{\partial S} \Rightarrow S = S(T)$ $\boxed{dU(S) = \frac{\partial U}{\partial S} dS = T(S)dS}$

$$F = F(T) = U\left(S(T)\right) - S(T)T,$$

$$dF(T) = \left[\overbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}^{T} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T} T - S(T) \right] dT \quad \Rightarrow \boxed{dF(T) = -S(T)dT}$$

(b)

$$U(S,V), \quad T = \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial S}\right|_V \quad \Rightarrow \quad S(T,V)$$

$$-P = \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial V}\right|_S \quad \Rightarrow \quad V(S,P)$$

$$dU(S,V) = T(S,V)dS - P(S,V)dV \quad \text{Innere Energie}$$

analog zu a):

$$F(T,V) = U(S(T,V),V) - S(T,V)T \qquad \text{Freie Energie,}$$
$$dF(T,V) = -S(T,V)dT - P(S,(T,V),V)dV$$

$$H(S,P) = U(S,V(S,P)) + V(S,P)P \qquad \text{Enthalpie,}$$
$$dH(S,P) = T(S,V(S,P))dS + V(S,P)dP$$

3. Funktionaldeterminantenkalkül:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y \qquad \text{Def. der Determinante}$$

(a)

1. $v(x,y) = y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x = 1,\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y$
2. $u(x,y) = x \quad \Rightarrow$ analog $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x$
3. folgt trivial aus Determinanteneigenschaft (Vertauschen von $u \leftrightarrow v$ oder $x \leftrightarrow y$ vertauscht Vorzeichen)
4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial\left(u(s(x,y),t(x,y))\right), v(s(x,y),t(x,y))}{\partial(x,y)} \\
&= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right)\left(\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x\right) \\
&- \left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x\right)\left(\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right) \\
&= \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t \left(\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y\right) + \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s \left(\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right) \\
&+ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t \left(\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y\right) + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s \left(\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right)
\end{aligned}$$

1. und 4. Term sind Null. 2. und 3. Term ergeben

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_s - \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_t\right)\left(\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_y\right) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}$$

Durch Umbenennen von $x,y \to s,t$ und $s,t \to x,y$ folgt

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \quad \overset{\text{auflösen}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}$$

(b)
Die erste Relation spiegelt einfach den *Satz der lokalen Umkehrbarkeit* aus Analysis wieder. Z.B. so: Sei $\phi(x,y) = \text{const.}$, also $x(y)$. Dann ist das Differential $dx(y) = \frac{\partial x}{\partial y}dy$. Andererseits ist aber $dy(x) = \frac{\partial y}{\partial x}dx$. Einsetzen liefert dann $dx = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}dx$, also $1 = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$. Und daraus folgt schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1} .$$

Da wir ja von Anfang an $\phi = \text{const.}$ angenommen haben, dürfen wir auch noch bei beiden partiellen Ableitungen die ϕ's dazuschreiben und erhalten das gesuchte Resultat.

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\phi} = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(x,\phi)} = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(x,\phi)} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{y}\frac{1}{\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{y}}{\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{x}}$$

{Hier wird $\phi = \phi(x,y) =$const. als unabhängige Variable aufgefasst, d. h. $y = y(x,\phi)$}.

(c)
Wir betrachten x und z als unabhängige Variable, so dass $y = y(x,z)$. Das erfolgt durch Auflösen von $F(x,y,z) = 0$ nach y. Das Differenzial für y ist dann

$$dy = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{z} dx + \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{x} dz$$

Weiterhin ist $w = w(x,y)$, also

$$dw = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y} dx + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x} dy.$$

Wir substituieren $y(x,z)$ für y in $w(x,y)$, und erhalten als Differenzial für $w(x,z)$:

$$dw = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x}\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{x} dz + \left(\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x}\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{z}\right) dx.$$

Daraus folgt

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x}\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{z}. \tag{1}$$

Analog erhalten wir aus dem Differenzial für $w(x(y,z),y)$:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{z} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x} + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y}\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{z}. \tag{2}$$

Wir eliminieren $\partial w/\partial y|_x$ (d.h. Gl. (2) in Gl. (1) einsetzen), und erhalten

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{z}\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{z}.$$

Wir lösen nun $w = w(x,y)$ nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und w, d.h. $x = x(y,w)$. Wir erhalten

$$dx = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{w} dy + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_{y} dw$$

Dir Gleichung $F(x, y, z) = 0$ lösen wir nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und z, und erhalten daraus $w = w(x(y, z), y)$. Das Differential für $w(y, z)$ ist

$$dw = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z dy + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_y dz.$$

Wir substituieren dies in die Gleichung für dx und erhalten schließlich

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z.$$