Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag zu Blatt 10
1.7.2011

---

1. Die zweite Quantisierung. Bose-Statistik.

(a) Der Dichte-Operator:

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r}),$$

wobei

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\hat{a}_{\mathbf{k}}; \quad \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}.$$

Deswegen

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}.$$

Der Grundzustand

$$|\Psi_0\rangle = |N_{k=0}, 0_{k\neq 0}\rangle,$$

(alle Teilchen haben $k = 0$).
Der Mittelwert des Dichte-Operators folgt aus

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}|\Psi_0\rangle = \begin{cases} N, & k_1 = k_2 = 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{1}$$

Deswegen

$$\bar{n} = \frac{N}{V}.$$

(b)

$$\bar{N}' = \langle\Psi_0|\hat{N}'|\Psi_0\rangle$$

$$\hat{N}' = \int\limits_{V'} d^3r\ \hat{n}(\mathbf{r}).$$

Benutzen wir (1):

$$\bar{N}' = N\frac{V'}{V}.$$

(c) Die Variation

$$\overline{(\Delta N')^2} = \overline{(N')^2} - \left(\bar{N}'\right)^2.$$

$$\overline{(N')^2} = \langle\Psi_0|\hat{N}'\hat{N}'|\Psi_0\rangle$$

$$= \frac{1}{V^2}\int\limits_{V'} d^3r_1 \int\limits_{V'} d^3r_2 \sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}_1}e^{-i(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}_2}\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3}\hat{a}_{\mathbf{k}_4}|\Psi_0\rangle.$$

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3}\hat{a}_{\mathbf{k}_4}|\Psi_0\rangle = \begin{cases} N^2, & k_1=k_2=k_3=k_4=0 \\ N, & k_1=k_4=0, \mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3\neq 0 \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{2}$$

Deswegen

$$\overline{(N')^2} = \frac{1}{V^2}\int_{V'} d^3r_1 \int_{V'} d^3r_2 \left[N^2 + N\sum_{\mathbf{k}\neq 0} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\right].$$

Wir benutzen die Formel:

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} = \frac{1}{V}\left[\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} - 1\right] = \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) - \frac{1}{V},$$

und erhalten

$$\overline{(N')^2} = N^2\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + N\frac{V'}{V} - N\left(\frac{V'}{V}\right)^2.$$

Letztendlich

$$\overline{(\Delta N')^2} = N\frac{V'}{V}\left(1-\frac{V'}{V}\right).$$

(d)

$$\hat{n}(\mathbf{r}_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2) = \Psi^\dagger(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_1)\Psi^\dagger(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}_1}e^{-i(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}_2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3}\hat{a}_{\mathbf{k}_4}$$

Benutzen wir (2):

$$\overline{\hat{n}(\mathbf{r}_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2)} = \frac{1}{V^2}\left[N^2 + N\sum_{\mathbf{k}\neq 0} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\right] = \frac{N^2}{V^2} - \frac{N}{V^2} + \frac{N}{V}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Deswegen

$$g(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) - \frac{\bar{n}}{N}.$$

Im thermodynamischen Limes und für $\mathbf{r}\neq 0$

$$g(\mathbf{r}\neq 0, N\to\infty) = 0.$$

(e) Für klassische Teilchen berechnen wir die folgende Grße

$$\overline{n(\mathbf{r}_1)dV_1 n(\mathbf{r}_2)dV_2},$$

wobei dV_1 das infinitesimale Volumen in der Nähe von $\mathbf{r}_1$ ist. Klarerweise ist ndV_i die Teilchenzahl im Volumen dV_i. Weil dV_i sehr klein sind, vernachlassigen wir die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als ein Teilchen im Volumen dV_i gibt. Dann

$$\overline{n(\mathbf{r}_1)dV_1 n(\mathbf{r}_2)dV_2} = \sum_{N_1 N_2} N_1 N_2 W(N_1,N_2) \approx W(1,1),$$

wobei $W(N_1,N_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchenzahl im Volumen V_1 und V_2 genau N_1 und N_2 ist.

Berechnen wir jetzt $W(1,1)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Teilchen im Volumen dV_1 ist, ist einfach dV_1/V. Für ein beliebiges Teilchen finden wir NdV_1/V. Wenn ein Teilchen im Volumen dV_1 ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderes Teilchen im dV_2 ist, $(N-1)dV_2/V$. Deswegen,

$$W(1,1) = N\frac{dV_1}{V}(N-1)\frac{dV_2}{V} \quad \Rightarrow \quad \overline{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} = \frac{N(N-1)}{V^2}.$$

Für $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ sind die Ergebnisse für die Bosonen und die klassische Teilchen gleich. Das Grund: die Wellenfunktion des Systems von Bosonen im Grundzustand ist gleich als die Wellenfunktion von unterscheidbarer Teilchen:

$$\Psi = \psi_0(\mathbf{r}_1)\dots\psi_0(\mathbf{r}_N), \quad \psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}.$$

2. Die zweite Quantisierung. Fermi-Statistik.

(a) Der Grundzustand:

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{|\mathbf{k}_a|\leqslant k_F,\sigma} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_a\sigma}|0\rangle.$$

Der Mittelwert des Dichte-Operators folgt aus

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}|\Psi_0\rangle = \begin{cases} 1, & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, |\mathbf{k}_1| \leqslant k_F \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Deswegen

$$\bar{n} = \frac{N}{V}.$$

(b)

$$\bar{N}' = N\frac{V'}{V}.$$

(c)

$$\hat{n}(\mathbf{r},\sigma) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}_2\sigma}.$$

$$\hat{n}(\mathbf{r}_1,\sigma_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2,\sigma_2) = \frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}_1}e^{-i(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}_2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_4\sigma_2}$$

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_4\sigma_2}|\Psi_0\rangle\Big|_{\sigma_1\neq\sigma_2} = \begin{cases} 1, & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4, |\mathbf{k}_{1,3}| \leqslant k_F \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \tag{4a}$$

$$\langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_4\sigma_2}|\Psi_0\rangle\Big|_{\sigma_1=\sigma_2} = \begin{cases} 1, & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4, |\mathbf{k}_{1,3}| \leqslant k_F \\ 1, & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, |\mathbf{k}_1| \leqslant k_F, |\mathbf{k}_2| > k_F \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \tag{4b}$$

Der Mittelwert für $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ist

$$\overline{n(\mathbf{r}_1, \sigma_1) n(\mathbf{r}_2, \sigma_2)} = \frac{1}{V^2} \sum_{|\mathbf{k}_{1,3}| \leqslant k_F} 1 = \overline{n(\sigma)}^2, \quad \overline{n(\sigma)} = \frac{\bar{n}}{2s+1}$$

(Fermionen mit unterschiedlichen Spins verhalten sich als unterscheidbare Teilchen). Der Mittelwert für $\sigma_1 = \sigma_2$ ist $(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$

$$\overline{n(\mathbf{r}_1, \sigma) n(\mathbf{r}_2, \sigma)} = \frac{1}{V^2} \left[\sum_{|\mathbf{k}_{1,3}| \leqslant k_F} 1 + \sum_{|\mathbf{k}_1| \leqslant k_F} \sum_{|\mathbf{k}_2| > k_F} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}} \right]$$

Wir benutzen die Formel:

$$\frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{1}{V} \left[\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant k_F} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] = \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant k_F} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$\frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant k_F} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \int\limits_{k \leqslant k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \left(\frac{\sin k_F r}{r} - k_F \cos k_F r \right).$$

Daraus folgt:

$$\overline{n(\mathbf{r}_1, \sigma) n(\mathbf{r}_2, \sigma)} = \overline{n(\sigma)}^2 - \frac{1}{4\pi^4 r^4} \left(\frac{\sin k_F r}{r} - k_F \cos k_F r \right)^2.$$

(d)

$$\overline{n(\mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_2)} = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \overline{n(\mathbf{r}_1, \sigma_1) n(\mathbf{r}_2, \sigma_2)} = \bar{n}^2 - \frac{2s+1}{4\pi^4 r^4} \left(\frac{\sin k_F r}{r} - k_F \cos k_F r \right)^2.$$

Deswegen

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^4 r^4 \overline{\overline{n(\sigma)}}} \left(\frac{\sin k_F r}{r} - k_F \cos k_F r \right)^2.$$

Die negative Korrelation entspricht die abstoßende Austauschwechselwirkung von Fermionen.