

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11**Prof. Dr. A. Shnirman**
Dr. B. Narozhny**Lösungsvorschlag zu Blatt 11**
8.7.2011

1. Magnetischer Phasenübergang

Benutzen wir die Relation zwischen der Wärmekapazität und der Entropie:

$$C = T \frac{dS}{dT}.$$

Die Änderung der Entropie als man die Temperatur von $T = 0$ bis $T > T_0$ erhöht:

$$\Delta S = \int_0^T dT \frac{C}{T} = C_{max}(1 - \ln 2).$$

Benutzen wir jetzt die Boltzmannsche Formel

$$S = k_B \ln W,$$

wo W das statistische Gewicht (oder die Zahl der Zustände) ist, und bestimmen ΔS .

Bei $T = 0$ ist das System ferromagnetisch und die Symmetrie ist zerbrochen. Es gibt nur einen einzigen Zustand und

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 1 \quad \Rightarrow \quad S(T = 0) = 0.$$

Bei $T > T_0$ haben wir $C = 0$. Das heißt, unser System nimmt keine Wärme auf, deswegen die Entropie maximal ist:

$$T < T_0 \quad \Rightarrow \quad W = 2^N \quad \Rightarrow \quad S(T > T_0) = Nk_B \ln 2.$$

Jetzt bestimmen wir

$$\Delta S = Nk_B \ln 2,$$

und letztendlich

$$C_{max} = \frac{Nk_B \ln 2}{1 - \ln 2}$$

2. Molekularfeld-Näherung für das Ising-Modell:

In der Molekularfeld-Näherung sieht jeder Spin ein Molekularfeld:

$$\hat{\mathcal{H}} = - \sum_i h_i \{\sigma_i\} \sigma_i, \quad h_i \{\sigma_i\} = H + J \sum_j \langle \sigma_j \rangle.$$

Der Mittelwert von σ kann nun leicht wie beim Paramagnetismus bestimmt werden:

$$\langle \sigma_j \rangle = \tanh [\beta(H + J_0 \langle \sigma_j \rangle)], \quad J_0 = zJ, \quad (1)$$

wo z die Zahl der nächsten Nachbarn ist.

Die Gibbs'sche freie Energie wird nun (in Molekularfeld-Näherung)

$$F(T, H) = -k_B T \ln Z = Nk_B T \{-\ln 2 - \ln \cosh[\beta(H + J_0 \langle \sigma(T, H) \rangle)]\} + \frac{1}{2} N J_0 \langle \sigma(T, H) \rangle^2.$$

Von (1):

$$\cosh[\beta(H + J_0 \langle \sigma(T, H) \rangle)] = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle \sigma \rangle^2}}.$$

Damit gilt

$$F(T, H) = Nk_B T \left\{ -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1 - \langle \sigma \rangle^2) \right\} + \frac{1}{2} Nk_B T_c \langle \sigma \rangle^2, \quad k_B T_c = J_0.$$

Die Wärmekapazität bei festem Feld ist

$$C_H = -T \left(\frac{\partial^2 F(T, H)}{\partial T^2} \right)_H.$$

Für $T > T_c$

$$T > T_c \quad \Rightarrow \quad \langle \sigma \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad C_H = 0.$$

Für $T < T_c$

$$C_H = \frac{Nk_B T}{1 - \langle \sigma \rangle^2} \left[\frac{\partial}{\partial T} \langle \sigma \rangle^2 + \frac{1}{2} \frac{T}{1 - \langle \sigma \rangle^2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \langle \sigma \rangle^2 \right)^2 + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \langle \sigma \rangle^2 \right] + \frac{1}{2} Nk_B T_c \frac{\partial^2}{\partial T^2} \langle \sigma \rangle^2.$$

Die Ableitung $\partial \langle \sigma \rangle / \partial T$ bekommen wir von der Selbstkonsistenzgleichung:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\tanh \beta H + \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle}{1 + \tanh \beta H \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle} \quad \Rightarrow \quad \tanh \beta H = \frac{\langle \sigma \rangle - \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle}{1 - \langle \sigma \rangle \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle}.$$

Verwenden wir jetzt die Relation:

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}.$$

Dann

$$\begin{aligned} \beta H &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh \beta H}{1 - \tanh \beta H} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{1 - \langle \sigma \rangle} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle}{1 + \tanh \beta J_0 \langle \sigma \rangle} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{1 - \langle \sigma \rangle} - \frac{T_c}{T} \langle \sigma \rangle. \end{aligned}$$

In der Nähe des Phasenübergangs entwickeln wir die Relation zwischen H und $\langle\sigma\rangle$ für kleine $\langle\sigma\rangle$:

$$\beta H \approx \langle\sigma\rangle \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) + \frac{1}{3}\langle\sigma\rangle^3 + \dots$$

Deswegen erhalten wir für $H = 0$, $T < T_c$

$$\langle\sigma\rangle^2 = -3\epsilon, \quad \epsilon = \frac{T - T_c}{T} \approx \frac{T - T_c}{T_c}.$$

Dann:

$$\frac{\partial}{\partial T}\langle\sigma\rangle^2 = -\frac{3}{T_c}, \quad \frac{\partial^2}{\partial T^2}\langle\sigma\rangle^2 = 0.$$

Letztendlich (hier $T \approx T_c + \mathcal{O}(\epsilon)$)

$$C_H = \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ \frac{3}{2}Nk_B + \mathcal{O}(\epsilon), & T < T_c \end{cases}.$$

Die Wärmekapazität hat einen Sprung bei T_c . Wir haben hier kein Potenzgesetz und zwar die kritische Exponente:

$$\alpha = \alpha' = 0.$$