

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyLösungsvorschlag zu Blatt 4
13.5.2011

1. Maxwell-Verteilung:

Die Gesamtenergie

$$H[\{p_n\}, \{x_n\}] = \sum_n \frac{p_n^2}{2m}.$$

Die 1-Teilchen-Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1, p_1) &= C_0 \int \prod_{n=2}^N d^3 p_n d^3 x_n \delta \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} - E \right) \\ &= C_0 V^{N-1} \int \prod_{n=2}^N d^3 p_n \delta \left(\sum_{n=2}^N \frac{p_n^2}{2m} - \left[E - \frac{p_1^2}{2m} \right] \right) \end{aligned}$$

Es bezeichne

$$Q_0 = E - \frac{p_1^2}{2m}, \quad \tilde{p}_n = \frac{p_n}{\sqrt{Q_0}},$$

und dann finden wir

$$\rho_1(x_1, p_1) = C_0 V^{N-1} Q_0^{\frac{3(N-1)}{2}-1} \int \prod_{n=2}^N d^3 \tilde{p}_n \delta \left(\sum_{n=2}^N \frac{\tilde{p}_n^2}{2m} - 1 \right).$$

Letztendlich

$$\rho_1(x_1, p_1) = A \left(E - \frac{p_1^2}{2m} \right)^{\frac{3N-5}{2}}, \quad (1)$$

wobei A eine Normierungskonstante ist.

Die 1-Teilchen-Impulsverteilung ist dann

$$f(p_1) = A' \left(E - \frac{p_1^2}{2m} \right)^{\frac{3N-5}{2}}.$$

Benutzen wir jetzt die Energie pro Teilchen $\bar{\epsilon} = E/N$

$$f(p_1) = A'' \left(1 - \frac{p_1^2}{2m\bar{\epsilon}N} \right)^{\frac{3N-5}{2}}.$$

Im Limes $N \gg 1$

$$f(p_1) \rightarrow B \left(1 - \frac{p_1^2}{2m\bar{\epsilon}N} \right)^{\frac{3N}{2}} \rightarrow B \exp \left(-\frac{3p_1^2}{4m\bar{\epsilon}} \right).$$

Das ist die Maxwell-Verteilung:

$$f(p) = B \exp \left(-\frac{p^2}{2mk_B T} \right), \quad (2)$$

wo wir die Relation $\bar{\epsilon} = 3k_B T/2$ benutzt haben. Die Normierungskonstante ist

$$B = \left[\frac{3}{4\pi m \bar{\epsilon}} \right]^{3/2} = \frac{1}{[2\pi m k_B T]^{3/2}}.$$

2. Kanonische Gesamtheit:

- (a) *Kanonische Gesamtheit:* (T, N, V) : N, V sind Randbedingungen für die Zustände, die zur Zustandssumme beitragen; T durch angekoppeltes Wärmebad. Zustandssumme:

$$Z(T, N, V) = \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}}, \quad U(T, N, V) = \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\alpha} E_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}}.$$

Schwankungen: Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \beta} &= - \sum_{\alpha} E_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}} \Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} &= \sum_{\alpha} E_{\alpha}^2 e^{-\beta E_{\alpha}} \Rightarrow \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}. \end{aligned}$$

Die Varianz

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \underbrace{\frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2}_{\langle E \rangle^2} - \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}}_{\langle E^2 \rangle} = -\langle (\Delta E)^2 \rangle.$$

Deswegen

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = - \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{N,V} = k_B T^2 \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V}}_{= C_V} = k_B T^2 C_V.$$

- (b) Die Kleinheit der Schwankungen:

$$\langle E \rangle \propto N,$$

weil die Energie extensiv ist.

Ähnlicherweise

$$U \propto N \Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} \propto N \Rightarrow \langle (\Delta E)^2 \rangle \propto N.$$

Deswegen

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}}{\langle E \rangle} \propto \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3. Curie-Paramagnetismus:

(a) Mikrozustände: $\{\alpha\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N\}$, $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, wo $\sigma_i \equiv 2S_i^z = \pm 1$.

Energien: $E_\alpha = -\frac{1}{2}\mu H_z \sum_i \sigma_i = -MH$, wobei $\mathbf{M} = (0, 0, M)$ und $\mathbf{H} = (0, 0, H)$.

Kanonische Zustandssumme:

$$Z = \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \prod_{i=1}^N e^{-\beta \mu H \sigma_i / 2} = \prod_{i=1}^N \underbrace{\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{-\beta \mu H \sigma_i / 2}}_{Z_1} = \left[2 \cosh \left(\frac{\beta \mu H}{2} \right) \right]^N.$$

Die freie Energie:

$$F \equiv -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta \mu H}{2} \right) \right].$$

(b) Die Entropie

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_H = k_B N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta \mu H}{2} \right) \right] - N \frac{\beta \mu H}{2} \tanh \left(\frac{\beta \mu H}{2} \right).$$

Die Magnetisierung

$$M = - \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{2} \mu N \tanh \left(\frac{\beta \mu H}{2} \right).$$

Die Wärmekapazitäten

$$c_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H = \frac{\mu^2 H^2}{4 T^2 \cosh^2 (\beta \mu H / 2)}.$$

$$c_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M = 0.$$

(c) Für $H/k_B T \ll 1$

$$M \approx \frac{1}{4} \beta \mu^2 N H.$$

Deswegen

$$\chi(T) = \frac{C}{T}, \quad C = \frac{1}{4} \mu^2 N.$$

Für $H/k_B T \gg 1$

$$M \approx \frac{\mu N}{2}.$$