Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag zu Blatt 8
10.6.2011

---

1. Landauscher Diamagnetismus:

(a) Die Schrödinger Gleichung:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{eH}{c}y\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right]\psi = E\psi.$$

(b)

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right) - \frac{m}{2}\omega_H^2(y-y_0)^2\right]\chi = 0.$$

(c) Die Eigenfrequenz:

$$\omega_H = \frac{|e|H}{mc}.$$

Das Zentrum der Schwingung:

$$y_0 = -c\frac{p_x}{eH}.$$

Energieniveaus des Oszillators:

$$E' = \hbar\omega_H\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(d) Die Landau-Niveaus:

$$E = \hbar\omega_H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}.$$

(e) Die Entartung: die Landau-Niveaus sind unabhängig von p_x!
Der Mittelpunkt y_0 muss innerhalb von der Fläche $L_x L_y$ liegen:

$$0 \leqslant y_0 \leqslant L_y.$$

Deswegen, die p_x-Werte gehören zu einem begrenzten Interval

$$\Delta p_x = \frac{eH}{c}L_y.$$

Die Zahl der möglichen Werte im Interval Δp_x ist

$$\mathcal{N}_{p_x} = \frac{L_x}{2\pi\hbar}\Delta p_x.$$

Deswegen der Entartungsgrad der Landau-Niveaus ist

$$\mathcal{N} = \frac{eHS}{2\pi\hbar c}, \quad S = L_x L_y.$$

(f) Das großkanonische Potential

$$\Omega = -T\sum_\lambda \ln\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon_\lambda)}\right).$$

Die Mikrozustände sind durch p_z und n bezeichnet. Die Zahl der möglichen Werte von p_z im Interval dp_z ist

$$\mathcal{N}_{p_z} = \frac{L_z}{2\pi\hbar}dp_z.$$

Man muss auch die Spinentartung (2) und die Entartung der Landau-Niveaus bemerken. Deswegen:

$$\sum_\lambda \to 2\mathcal{N}\frac{L_z}{2\pi\hbar}\sum_n\int dp_z.$$

Dann ($V = SL_z = L_xL_yL_z$)

$$\Omega = -T\frac{2eHV}{(2\pi\hbar)^2c}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \ln\left(1+\exp\left[\beta\left(\mu-\frac{p_z^2}{2m}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_H\right)\right]\right).$$

(g)

$$\omega_H = \frac{|e|H}{mc} = 2\mu_B.$$

$$\Omega = 2\mu_BH\sum_{n=0}^{\infty} f[\mu-(2n+1)\mu_BH], \quad \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

$$f(\mu) = -\frac{TmV}{2\pi^2\hbar^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \ln\left(1+\exp\left[\beta\left(\mu-\frac{p_z^2}{2m}\right)\right]\right).$$

(h) Die Summationformel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n+\frac{1}{2}\right) \approx \int\limits_0^{\infty} dxF(x) + \frac{1}{24}F'(0).$$

Dann

$$\Omega = 2\mu_BH\int\limits_0^{\infty} dxf(\mu-2\mu_BHx) + \frac{2\mu_BH}{24}\frac{\partial}{\partial n}f(\mu-2\mu_BHn)\Big|_{n=0}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\mu} dxf(x) - \frac{(2\mu_BH)^2}{24}\frac{\partial f(\mu)}{\partial\mu}.$$

Das erste Glied ist unabhängig vom Magnetfeld. Deswegen

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2H^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2}.$$

(i) Die Suszebilität ist

$$\chi_{dia} = \frac{\mu_B^2}{3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}$$

(j) Bemerken Sie, dass

$$N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} .$$

Es folgt:

$$\chi_{dia} = -\frac{1}{3} \chi_P .$$

(k) Die gesamte Suszebilität:

$$\chi = \chi_{dia} + \chi_P = \frac{2}{3} \chi_P .$$

Das Gas ist paramagnetisch.