Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Zwischenklausur, Lösungen
14.6.2011

---

1. Quickies (16 Punkte)

(a)

$$S = -k_B \mathbf{Tr}\left[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\right] = -k_B \sum_n \rho_n \ln \rho_n .$$

(b)

$$\Delta S \geqslant 0.$$

Die Formulierung von Clausius lautet:
Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niederer auf einen Körper höherer Temperatur ist.
Die Formulierung von Kelvin und Planck lautet:
Es gibt keine Zustandsänderung, deren einzige Ergebnisse das Abkühlen eines Körpers und das Heben eines Gewichtes sind.

(c)

$$S(T \to 0) \to 0.$$

Extra Punkte:

$$S(T=0) = k_B \ln g,$$

wo g die Entartung des Grundzustandes ist.
Quantenmechanik: bei $T = 0$ ist das System in seinem Grundzustand. Das ist ein reine Zustand. So gilt fr die Dichtematrix

$$\mathbf{Tr}\left[\hat{\rho}^2\right] = 1.$$

(d) Die Entropie:

$$S(T, V, \mu) = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu}.$$

Der Druck:

$$P(T, V, \mu) = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu}.$$

(e)

$$F = -k_B T \ln Z,$$

wo Z die Zustandssumme ist

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

(f)

$$\Omega = k_B T \sum_\lambda \ln\left(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_\lambda)}\right), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Bei λ bezeichnet man die Gesamtheit der Quantenzahlen der Teilchen.

(g)

$$\sum_\lambda n_F(\epsilon_\lambda) = N,$$

wo N die Gesamtteilchenzahl ist.

Elektron-Gas:

$$\lambda \to (\mathbf{p}, \sigma),$$

$$\sum_\lambda n_F(\epsilon_\lambda) = (2s+1)V \int d\epsilon \frac{\nu(\epsilon)}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} = N.$$

Diese Gleichung definiert im impliziter Form das chemische Potential als Funktion von T und N ($\nu(\epsilon)$ ist die Zustandsdichte).

(h)

$$N = V \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}.$$

2. Thermodynamik (5 Punkte)

Laut Definition:

$$C_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}.$$

Deswegen bei $V, N = konst$:

$$S(T) = S_0 + \int_{T_0}^{T} dT' \frac{C_{V,N}(T')}{T'} = S_0 + \int_{T_0}^{T} dT' \left[\frac{3}{2}\frac{k_B N}{T'} + N\gamma T'\right]$$

$$= \frac{3}{2} k_B N \ln\frac{T}{T_0} + \frac{1}{2} N\gamma \left(T^2 - T_0^2\right) + S_0.$$

3. System von N nichtwechselwirkenden Spins $S = 1$ (magnetisches Moment μ) im Magnetfeld H (15 Punkte)

(a) Mikrozustände: $\{\alpha\} = \{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N\}$, $m_i \in \{-1, 0, 1\}$

(b) Energien: $E_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = -\mu H \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_N\right)$

Die Dichtematrix:

$$\rho_\alpha = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\alpha}.$$

Die Zustandssumme:

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} = \sum_{m_1=-1}^{1} \sum_{m_2=-1}^{1} \ldots \sum_{m_N=-1}^{1} \exp\big(\beta\mu H\,(m_1+m_2+\ldots+m_N)\big) \\
&= \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{m_i=-1}^{1} e^{\beta\mu H\, m_i} \right) = \prod_{i=1}^{N} Z_i
\end{aligned}
$$

Die Z_i sind offenbar alle gleich

$$
Z = (Z_1)^N \quad , \quad Z_1 = \sum_{m=-1}^{1} e^{\beta\mu H\, m} = \frac{\sinh\big(3\beta\mu H/2\big)}{\sinh\big(\beta\mu H/2\big)} \qquad \Big[= 1 + 2\cosh\beta\mu H \Big]
$$

(c) Die freie Energie:

$$
F(T,N,H) = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln \frac{\sinh\big(3\beta\mu H/2\big)}{\sinh\big(\beta\mu H/2\big)}
$$

$$
\Big[= -k_B T N \ln\left(1 + 2\cosh\beta\mu H\right) \Big]
$$

(d) Die Entropie:

$$
S(T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,H}
$$

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
S(T) = k_B N \ln \frac{\sinh\big(3\beta\mu H/2\big)}{\sinh\big(\beta\mu H/2\big)} \\
- k_B N \frac{\beta\mu H}{2} \left[3\coth\big(3\beta\mu H/2\big) - \coth\big(\beta\mu H/2\big)\right].
\end{aligned}
$$

$T \to \infty$:
Für $\beta\mu H \ll 1$:

$$
\frac{\sinh\big(3\beta\mu H/2\big)}{\sinh\big(\beta\mu H/2\big)} \approx 3 \qquad \Big[1 + 2\cosh\beta\mu H \approx 3\Big].
$$

Deswegen

$$
F(\beta\mu H \ll 1) \approx -k_B T N \ln 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{S \approx k_B N \ln 3}.
$$

$T \to 0$:
Für $\beta\mu H \gg 1$:

$$
\frac{\sinh\big(3\beta\mu H/2\big)}{\sinh\big(\beta\mu H/2\big)} \approx e^{\beta\mu H} \qquad \Big[1 + 2\cosh\beta\mu H \approx e^{\beta\mu H}\Big].
$$

Deswegen

$$
F(\beta\mu H \gg 1) \approx -k_B T N \ln e^{\beta\mu H} = -\mu H N \quad \Rightarrow \quad \underline{S \approx 0}.
$$

4. Chemisches Potential für zweidimensionales Elektronengas: (14 Punkte)

(a) Die Gesamtteilchenzahl:

$$N = \frac{2A}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty \frac{p\,dp}{\exp\left(\frac{\frac{p^2}{2m}-\mu}{k_BT}\right)+1}$$

$$z = \frac{\frac{p^2}{2m}-\mu}{k_BT}, \quad dz = \frac{p\,dp}{mk_BT}, \quad N = \frac{3A}{2\pi\hbar^2}mk_BT\int_{-\frac{\mu}{k_BT}}^\infty \frac{dz}{e^z+1}$$

$$e^z = t \longrightarrow \int_a^b \frac{dz}{e^z+1} = \int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{t(t+1)} = \int_{t_a}^{t_b} dt\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) = \ln\frac{t}{t+1}\bigg|_{t_a}^{t_b} = \ln\left(\frac{e^z}{e^z+1}\right)\bigg|_{t_a}^{t_b}$$

$$N = \frac{A}{\pi\hbar^2}mk_BT\ln\left(\frac{e^z}{e^z+1}\right)\bigg|_{-\frac{\mu}{k_BT}}^\infty = \frac{A}{\pi\hbar^2}mk_BT\ln\left(e^{\frac{\mu}{k_BT}}+1\right)$$

$\mu(T)$ ergibt sich aus der Bedingung

$$N(T) = N(T=0) = \frac{A}{\pi\hbar^2}m\epsilon_F,$$

wobei $\epsilon_F = \mu(T=0)$.
Deswegen:

$$\epsilon_F = k_BT\ln\left(1+e^{\frac{\mu}{k_BT}}\right), \quad e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}} = 1+e^{\frac{\mu}{k_BT}},$$

und

$$\underline{\mu(T) = k_BT\ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}}-1\right)}$$

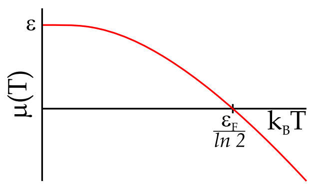
(b)

$$k_BT \ll \epsilon_F: \quad \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}}-1\right) = \frac{\epsilon_F}{k_BT}+\ln\left(1-e^{-\frac{\epsilon_F}{k_BT}}\right) \approx \frac{\epsilon_F}{k_BT} - e^{-\frac{\epsilon_F}{k_BT}}$$

$$\mu(T) \approx \epsilon_F - k_BTe^{-\frac{\epsilon_F}{k_BT}} = \epsilon_F - \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\epsilon_F}{k_BT}}\right)$$

$$k_BT \gg \epsilon_F: \quad \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}}-1\right) \approx \ln\left[\frac{\epsilon_F}{k_BT}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\epsilon_F}{k_BT}\right)^2+\ldots\right]$$

$$\mu(T) \approx -k_BT\ln\frac{k_BT}{\epsilon_F}$$



(c)

$$\mu = 0 \quad \text{bei} \quad \epsilon_F = k_BT\ln 2, \quad \Rightarrow \quad T_{\mu=0} = \frac{\epsilon_F}{k_B\ln 2}$$