

II. Magnetostatik

① Biot - Savart - Gesetz

Ruhende Ladungen $\rightarrow$ elekt. Feld $\rightarrow$ Elektrostatik

Ladungen in der Bewegung $\rightarrow$ Ströme $\rightarrow$ Magnetfeld

Stationäre Ströme $\rightarrow$ Magnetostatik

(zeitunabhängige Magnetfelder)

Strom: $I = dQ/dt \quad (= \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}})$

Stromdichte $= \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}}$



$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n}$$

Wenn $\vec{n} \parallel \vec{j}$, dann $dI = j \cdot dS$, $j \equiv |\vec{j}|$

Kontinuitätsgleichung:



$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) + \underbrace{\int_S d^2S \vec{n} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{\parallel} = 0$$

Ladungserhaltung $\Rightarrow$

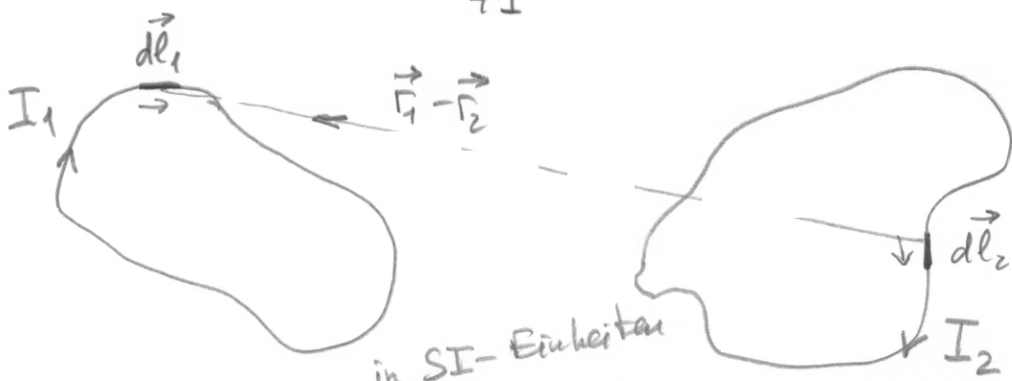
$\int d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$ Gauss'scher Satz

$$\Rightarrow \int_V d^3r \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \right) = 0$$

V - beliebig $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Magnetostatik: $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$



$$d\vec{F}_{12} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

in SI-Einheiten

Biot-Savart-Gesetz

Kraft auf das Stromelement $I_1 d\vec{l}_1$ in $\vec{r}_1$ erzeugt von dem Element $I_2 d\vec{l}_2$ in $\vec{r}_2$

Die volle Kraft mit der eine geschlossene Schleife 2 auf die Schleife 1 wirkt

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \dots =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

genügt explizit dem 3. Newtonschen Axiom

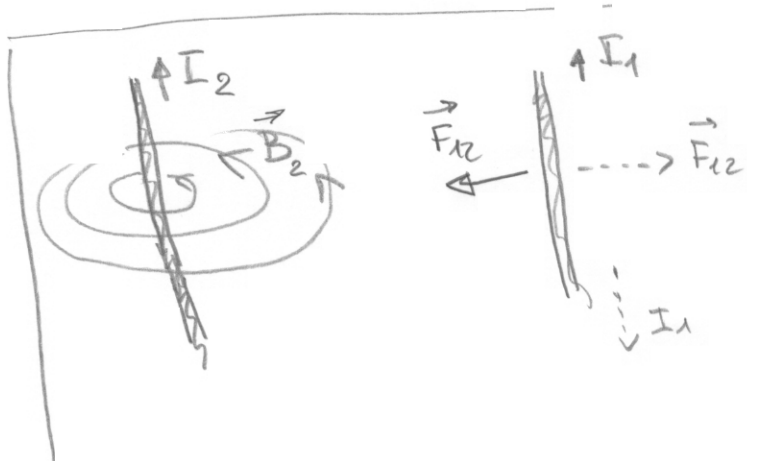
$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

magnetische Induktion
 $\equiv$ magnetische Flussdichte
 (= Magnetfeld $\vec{B}$)
 erzeugt in Punkt $\vec{r}_1$ von dem Element $I_2 \cdot d\vec{l}_2$, das im Punkt $\vec{r}_2$ sich befindet.

$$d\vec{F}_{12} = I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2)$$

$$\vec{F}_{12} = I_1 \oint_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$



Einheitensysteme

SI

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$\vec{F}_{12} = I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Magnetfeld im Vakuum $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \equiv 1/c^2$$

Einheit für B: 1 Tesla (T)

Gauß

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$F_{12} = \frac{1}{c} I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2)$$

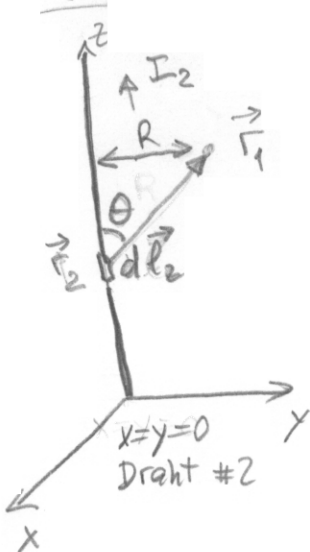
$$\vec{B}_2 = \frac{1}{c} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

1 Gauss (G)

1 T $\leftrightarrow$ 10⁴ G

Kraft zwischen zwei geraden parallelen Drähten



$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \frac{dz_2 \cdot R}{[R^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta$$

$z_2 = R \cot\theta$

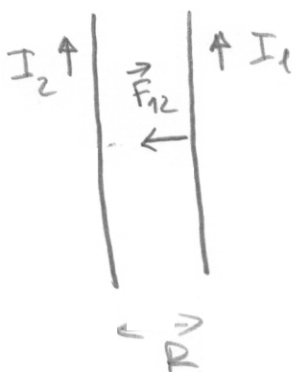
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \frac{2}{R}$$

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_y I_1 I_2 \frac{2}{R} dz_1$$

Mit $I_1 = I_2 = 1\text{A}$, $R = 1\text{m}$

gilt $dF_{12}/dz_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$



Allgemeinere Formulierung des Biot-Savart-Gesetzes
(für eine beliebige Verteilung der Stromdichte $\vec{j}$):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

zum Vergleich: Coulomb-Gesetz

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{F} = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Kraft auf eine Punktladung:

$$\vec{j}(\vec{r}) = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\rightarrow \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}_0) \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

② Feldgleichungen, Vektorpotential,
Ampère-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_r \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$$

$\vec{A}$ - Vektorpotential

$\uparrow$ beliebig
(Eichfreiheit)

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad \text{Eichtransformation}$$

Wir wählen $\chi=0$, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Dann

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}_{=0 \text{ im stationären Fall}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$

Coulombgleichung

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (*)$$

Weiter:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \\ &= -\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} =\end{aligned}$$

$$= \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Ampère - Gesetz
(**)

(*), (**) - Maxwell-Gl. für B im statischen Fall

Integralform des Ampère - Gesetzes:

Man integriert die normale Komponente der Gl. (**) $\int_S d^2S$ über eine offene Fläche S mit dem Rand C

Stokes'scher Satz:

$$\oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{A} = \int_S d^2S \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$



$$\Rightarrow \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_S d^2S \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \xrightarrow{\text{Stokes}} \mu_0 \int_S d^2S \vec{n} \cdot \vec{j} \xrightarrow{\text{Ampere}} \mu_0 I_C$$

der gesamte Strom durch die Fläche S' ($\equiv$ durch den Kontour C)

Integralform des Ampère-Gesetzes

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_C$$



Randbedingungen



$\vec{K}$ - Flächenstromdichte

$$[K] = \frac{\text{Strom}}{\text{Länge}} = \left[\frac{I}{L} \right] = [jL]$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

+ Gauss'scher Integralsatz

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \right]$$

② Ampère-Gesetz (im Integralform)

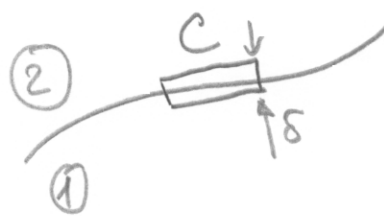
$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_C$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} B_{2\perp} - B_{1\perp} &= 0 \\ \vec{B}_{2\parallel} - \vec{B}_{1\parallel} &= \mu_0 \vec{K} \times \vec{n} \end{aligned}}$$

zu vergleichen:

$$\begin{aligned} E_{2\perp} - E_{1\perp} &= \sigma / \epsilon_0 \\ \vec{E}_{2\parallel} - \vec{E}_{1\parallel} &= 0 \end{aligned}$$

②  $\oint_C \vec{A} d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \underbrace{\vec{n}_s dS}_{dS} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_s dS \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}_{1\parallel} = \vec{A}_{2\parallel}}$$

Zusätzlich, in der Coulomb-Eichung

 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \boxed{A_{1\perp} = A_{2\perp}}$

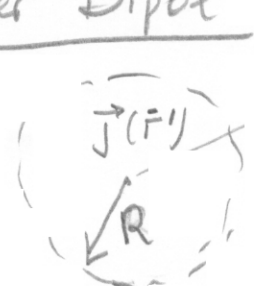
Thus, in Coulomb-Eichung $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$

③ Multipolentwicklung, magnetischer Dipol

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$r \gg R_0 \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r'_i}{r^3} + \dots$$

 $\vec{J}(\vec{r}')$ $\vec{r}$ R

$$\vec{J}(\vec{r}) = 0 \text{ für } r \gg R$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Monopol}} + \sum_i \underbrace{\frac{r'_i}{r^3} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Dipol}} + \dots \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{(0)}(\vec{r}) + \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) + \dots$$

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}) = 0 \text{ Beweis!}$$

$f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ - beliebige Funktionen, $\vec{j}(\vec{r}) = 0$ für $r > R$.
und $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Dann $\int d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) = 0$
(Beweis: partielle Integration)

Wir nehmen $f = 1$, $g = r_i \rightarrow \int d^3r j_i = 0$

$\Rightarrow \left[\int d^3r \vec{j} = 0 \right] \rightarrow \boxed{A^{(0)}(\vec{r}) = 0}$ keine magnetische Monopole!

Dipol - Beitrag:

$g = r_i, f = r_k \rightarrow \int d^3r (\Gamma_i j_k + \Gamma_k j_i) = 0$

$$A_k^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_i \Gamma_i \int d^3r' j_k(\vec{r}') \Gamma_i'$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \sum_i \Gamma_i \int d^3r' (j_k(\vec{r}') \Gamma_i' - j_i(\vec{r}') \Gamma_k') =$$

$$a_k b_i - a_i b_k = \sum_l \epsilon_{kil} (\vec{a} \times \vec{b})_l$$

$$= -\frac{\mu_0}{8\pi r^3} \sum_{il} \epsilon_{kil} \Gamma_i \int d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]_l$$

$$= -\frac{\mu_0}{8\pi r^3} \left[\vec{r} \times \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right]_k$$

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{8\pi r^3} \vec{r} \times \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

magnetisches Dipolmoment

Vektorpotential
eines magnetischen Dipols

$$\boxed{\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}$$

-48-

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \approx \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right],$$

$$\vec{n} = \vec{r}/r$$

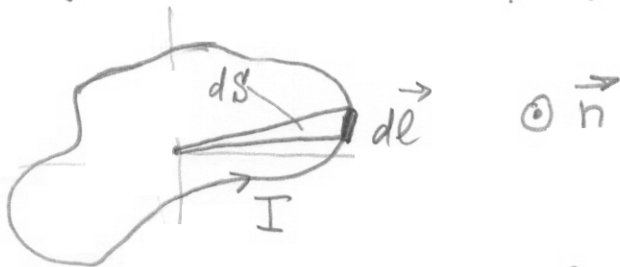
Dipolfeld $\vec{B}(\vec{r})$ hat dieselbe Struktur als das elektrische Feld eines elektrischen Dipols $\vec{p}$.



Beispiele von magnetischen Dipolen: Erde, Elementarteilchen (Elektron, Proton, Neutron, ...), Stromschleife, ..

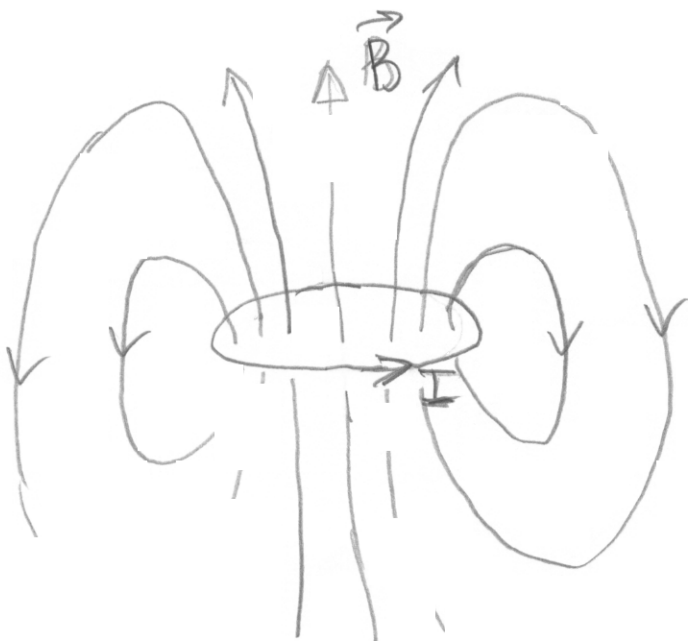
Magnetisches Moment einer Stromschleife:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{2} \int \vec{r} \times d\vec{\ell}$$



einfacher Fall: ebene Schleife $\rightarrow \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{\ell} = dS \cdot \vec{n}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{m} = I \int dS \cdot \vec{n} = IS \vec{n}}$$



Dipolfeld für Abstände $r \gg R$

Gyromagnetisches Verhältnis

Wir betrachten einen starren Körper mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, der mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine feste Achse rotiert



Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$

Magnetisches Dipolmoment:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})$$

Der Körper hat auch eine Massendichte $\rho_M(\vec{r})$, die mitrotiert und dadurch zum Drehimpuls $\vec{L}$ führt:

$$\vec{L} = \sum_i M_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \int d^3r \rho_M(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})$$

Annahme: die Masse M und die Ladung q des Körpers sind gleich verteilt:

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\rho_M(\vec{r})} = \text{const} = \frac{q}{M}$$

Dann

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2M} \vec{L}}$$

(*)

$\frac{m}{L}$ - gyromagnetisches Verhältnis

Der klassische Zusammenhang zwischen $\vec{L}$ und $\vec{m}$ gilt für Elementarteilchen nicht. Abweichungen: g-Faktor

$$\vec{m} = g \frac{q}{2M} \vec{L}$$

Beispiel: Elektron

$\vec{L} \rightarrow$ Spin (der innere Drehimpuls) $\vec{S}$, $S_z = \pm \hbar/2$

Dann (*) $\rightarrow m_e = -\frac{g_e}{2} \mu_B$; $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$
 (der Bohrsche Magneton)
 da Elektronenladung $-e$

Klassisch $g=1$

Quantenmechanisch:

Dirac-Gleichung $\rightarrow g_e = 2$

Quantenelektrodynamik $\rightarrow g_e = 2 \times 1,001159652...$
 wie im Experiment beobachtet wird

Für Proton $g_p = 2 \times 2,79...$ usw.

Kraft und Drehmoment auf magnetisches Moment
im äußeren Magnetfeld

$$\vec{j}(\vec{r}) = 0 \text{ für } r > R_0$$



$$\vec{F} = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times [\vec{B}(0) + \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) + \dots]$$

$$\approx \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0)$$

$$\boxed{\int d^3r \vec{j}(\vec{r}) = 0}$$

$$F_k = \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} j_l(\vec{r}) r_i \nabla_i B_m(0) \quad \left(\int d^3r (r_i j_e + r_e j_i) = 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} (j_e r_i - j_i r_e) \nabla_i B_m(0)$$

$$\left(a_j b_i - a_i b_j = \sum_k \epsilon_{kji} (\vec{a} \times \vec{b})_k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} \epsilon_{pil} (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0)$$

$$\left(\sum_l \epsilon_{klm} \epsilon_{pil} = \delta_{mp} \delta_{ki} - \delta_{mi} \delta_{kp} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{imp} \int d^3r (\delta_{mp} \delta_{ki} - \delta_{mi} \delta_{kp}) (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0) =$$

- 51 -

$$= \frac{1}{2} \sum_m \int d^3r \left[(\vec{F} \times \vec{J})_m \nabla_k B_m(0) - (\vec{F} \times \vec{J})_k \underbrace{\nabla_m B_m(0)}_{\substack{\parallel \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) = 0}} \right]$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{F} \times \vec{J}$$

$$F_k = \sum_m m_m \nabla_k B_m(0) = \sum_m \nabla_k m_m B_m(0)$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U ; \quad \left[U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \right] \quad \begin{array}{l} \text{potentielle} \\ \text{Energie} \\ \text{(im Allgemeinen keine} \\ \text{Gesamtenergie)} \end{array}$$

Analogie mit elektrischem Dipol
Drehmoment

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

(→ Kompass)

$$\begin{aligned} d\vec{N} &= \vec{r} \times d\vec{F} \\ \vec{N} &= \int d^3r \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) \\ &\approx \int d^3r \vec{r} \times [\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(0)] \\ &= \dots = \vec{m} \times \vec{B}(0) \end{aligned}$$

④ Faraday'sches Induktionsgesetz

Elektrostatik ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{Gauss}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{Poisson}$$

Magnetostatik ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$)

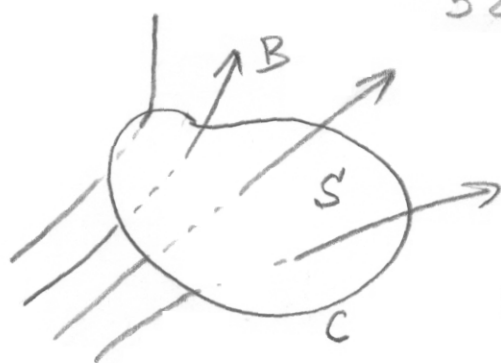
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{Ampère})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Faraday, 1831: Zusammenhang zwischen zeitabhängigen
elektrischen und magnetischen Feldern:

Änderung von $\vec{B}$ induziert $\vec{E}$ und damit $\vec{J}$



$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = - \frac{d}{dt} \int_S dS \vec{n} \cdot \vec{B}$$

$$\mathcal{E} = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E}$$

"elektromotorische Kraft" (EMK)

[hat Dimensionen des elektrost. Potentials, nicht der Kraft!]

$$\Phi = \int_S dS \vec{n} \cdot \vec{B} \quad \text{magnetischer Fluss}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Faraday-Gesetz

[in Gauß-Einheiten:
 $\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$]

! Notationen! mag. Fluss mit Skalarpotential nicht zu verwechseln!

Faraday-G + Stokes'scher Satz

$$\rightarrow \int_S dS \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{d}{dt} \int_S dS \vec{n} \cdot \vec{B}$$

Schleife C fest (bewegt sich nicht)

$$\rightarrow \int_S dS \vec{n} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

Faraday-Gesetz
in differentieller Form
(anstatt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ im statischen Fall)

Wir werden später sehen, dass auch der
Ampère-Gesetz im nicht-statischen Fall modifiziert
sein muss (Änderung von $\vec{E}$ induziert $\vec{B}$)

⑤ Magnetische Energie, Induktivitäten

Magnetische Energie ist die Arbeit, die man leisten muß, um die gegebene Stromverteilung zu erzeugen

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = - \sum_i q_i (\vec{E}_i + \vec{v}_i \times \vec{B}_i) \cdot \vec{v}_i \\ &= - \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Für eine Stromschleife
das ist gerade

$$\frac{dW}{dt} = -I \mathcal{E} ; \quad \mathcal{E} = \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E}$$

↑ EMK

Benutzen

- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
- partielle Integration
- Faraday-G. $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$$\rightarrow \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int d^3r \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B}^2$$

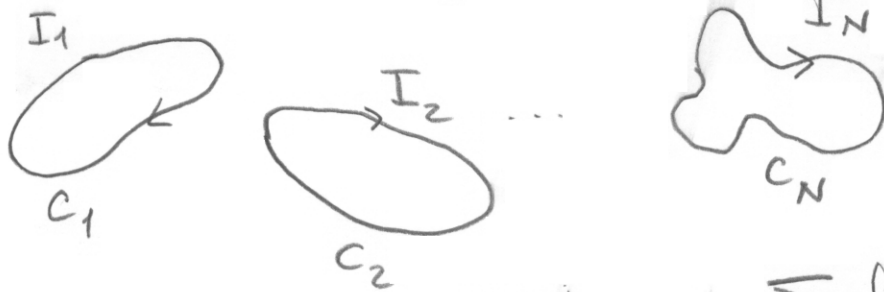
$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B}^2$$

Völlig analog zur elektrost. Energie

$$W_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2$$

Induktivitätskoeffizienten

(analog zu Kapazitätskoeffizienten in der Elektrostatik)



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \int_{\text{Schleife \# } i} d^3r_i \frac{\vec{j}(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Wir werden annehmen, dass der Querschnitt von Drähten a_i viel kleiner, als die charakteristische Ausdehnung R ist.



$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_{C_i} \frac{d\vec{l}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Magnetischer Fluss durch Schleife # j : $\Phi_j = \int_{S_j} d\vec{S}_j \cdot \vec{B}(\vec{r}_j) =$

$$= \int_{S_j} d\vec{S}_j \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_j)) = \oint_{C_j} d\vec{l}_j \cdot \vec{A}(\vec{r}_j) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i$$

$$M_{ij} = M_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

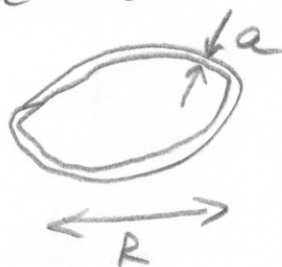
Induktivitätskoeffizienten

$M_{ii} \equiv L_i$ Selbstinduktivität

$M_{ij} (i \neq j)$ - Gegeninduktivitäten

! L_i divergiert im Limes $a \rightarrow 0$

$$L_i \sim \frac{\mu_0}{4\pi} R \ln \frac{R}{a}$$



Gesamtenergie einer Anordnung der Stromschleifen



$$\left. \begin{array}{l} I_i \ (i=1 \dots N) \\ M_{ij} \end{array} \right\} \rightarrow W_{\text{mag}} = ?$$

$$W_{\text{mag}} = \int dt \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \int dt \left(\frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} \right) \quad (*)$$

↑
Arbeit gegen
der EMK

↑ mechanische
Arbeit
(Bewegung
der Schleifen)

$$\frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} = - \sum_i I_i \mathcal{E}_i = \sum_i I_i \frac{d\Phi_i}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j)$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die gegebene Anordnung von Stromschleifen zu erzeugen!

- ii) erst Ströme in den Schleifen weit voneinander erzeugen und dann zusammenbringen
- i) erst die Schleifen in die endgültige Positionen bringen und dann Ströme erzeugen

Die Gesamtenergie W_{mag} ist davon unabhängig
Aber die beide Beiträge in (*) werden separat unterschiedlich sein.

$$\frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \sum_{ij} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

i) die Schleifen bewegen sich nicht
($\Rightarrow M_{ij} = \text{const}$)

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = 0 ; \quad \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \sum_{ij} M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt}$$

$$\rightarrow \boxed{W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j}$$

ii) die Ströme sind konstant;
die Schleifen bewegen sich

$$\frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \sum_{ij} I_i I_j \frac{dM_{ij}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = 2 \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = - \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} \Big|_{I = \text{const}}$$

iii) die Flüsse $\Phi_i = \sum_{ij} M_{ij} I_j$ sind konstant,
(Supraleitende Schleifen); die Schleifen
bewegen sich

$$\frac{dW_{\text{mag}}}{dt} = \sum_i I_i \underbrace{d\Phi_i}_0 + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} \Big|_{\Phi = \text{const}}$$

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j$$

$$I_i = \sum_j (M^{-1})_{ij} \Phi_j$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (M^{-1})_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

Analogie mit

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (C^{-1})_{ij} Q_i Q_j$$

↑ el/st. Potential; Benutze φ (nicht Φ),
um von Φ (mag. Fluss) zu unterscheiden

Wie schon oben erwähnt wurde, kann W_{mag} äquivalent durch die Feldverteilung $B(\vec{r})$ ausgedrückt werden.

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i ; \quad \Phi_i = \int_{S_i} dS \vec{n} \cdot \vec{B} = \int_{S_i} dS \vec{n} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_{C_i} d\vec{\ell}_i \cdot \vec{A}$$

$$\rightarrow \boxed{W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{C_i} d\vec{\ell}_i \vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})}$$

- $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$
- partielle Integration
- $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\rightarrow \boxed{W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B}^2}$$