Kapitel V. Spezielle Relativitätstheorie, kovariante Formulierung der Elektrodynamik

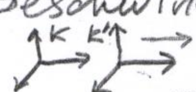
Literatur: Jackson, Fließbach, LL Band II "Feldtheorie"

① Einstein'sches Relativitätsprinzip

Gewöhnliche (Newton-) Mechanik: Galilei-Invarianz:

Gesetze der Newton-Mechanik gelten in gleicher Form in allen Inertialsystemen:

zwei Inertialsysteme: K und K', die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zueinander bewegen



Galilei-Transformation: $t' = t$, $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$ (GT)

Als Beispiel: System von Teilchen $i = 1, 2, 3, \ldots$ mit zwei-Körper-Potential $V(r)$.

Im Bezugssystem K: $$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1)$$

Im Bezugssystem K': $$m_i \ddot{\vec{r}}_i{}' = -\vec{\nabla}_i{}' \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}'|) \quad (1')$$

$(1) \overset{(GT)}{\longleftrightarrow} (1')$ – Galilei-Invarianz

Die Wechselwirkung wird in der gewöhnlichen Mechanik durch die potentielle Energie beschrieben, die eine Funktion der Teilchenkoordinaten ist. Dass bedeutet augenblickliche Ausbreitung der Wirkung

---

Wellenphänomene: keine Galilei-Invarianz, Änderung der Form der Gleichungen

Bezugssystem K: $$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

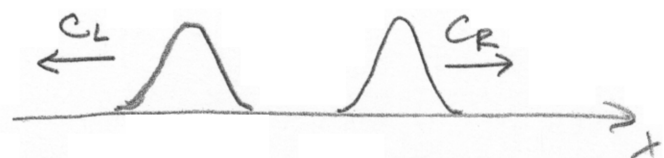
$(GT) \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}\vec{\nabla}' \quad ; \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}'$

Damit im Bezugssystem K':

$$(2) \xrightarrow{GT} \left[\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2}\vec{v}\vec{\nabla}'\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\vec{\nabla}')^2\right] f'(\vec{r}\,', t') = 0 \quad (2')$$

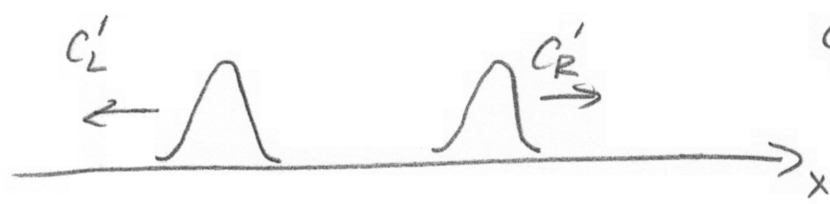
(2') hat <u>nicht</u> dieselbe Form als (2) → keine Galilei-Invarianz!

Für Schallwellen ist die fehlende Invarianz der Wellengleichung völlig einsichtig. Diese Wellen breiten sich in einer Substanz (Luft, Wasser, Festkörper, ...) aus. Nach der Galilei-Transformation bekommen wir eine bewegende Substanz. Damit verändert sich die Wellengleichung. Die einfache Form (2) gilt nur im ausgezeichnetem System (K), in dem das Ausbreitungsmedium ruht. Dann



K: $\quad c_L = c_R = c$

Für einen Beobachter im Bezugssystem K' breiten sich die Wellen nach links und rechts mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus!

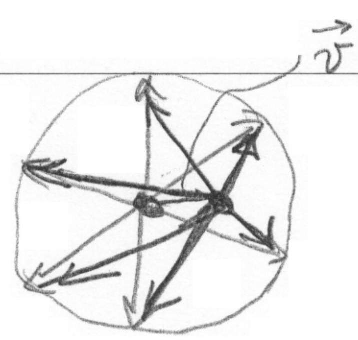


$$c'_{L/R} = c \pm v$$

K':

In 2D, 3D, ...

$\vec{c}\,' = \vec{c} + \vec{v}$



K: gleiche Geschwindigkeit in allen Richtungen $|\vec{c}| = c$

K': $|\vec{c}\,'| = |\vec{c} + \vec{v}|$ ist von der Richtung abhängig

Maxwell-Gleichungen → el/mag Wellengleichungen
⇒ Maxwell-Gl. sind <u>nicht</u> Galilei-Invariant
⇒ ???

vor Einstein:

Verschiedene Erklärungsmöglichkeiten:

1) Maxwell-Gl. sind nicht korrekt.
   Richtige Theorie des Elektromagnetismus ist Galilei-Invariant
2) Das Galilei-Relativitätsprinzip ist nur auf die klassische Mechanik anwendbar.
   Für den Elektromagnetismus gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem, in dem sich die lichttragende Substanz – – der Äther – in Ruhe befindet
3) Es gibt ein neues, allgemeines, Relativitätsprinzip, das sowohl für die Mechanik als auch für den Elektromagnetismus gibt.
   ⇒ Gesetze der Mechanik müssen modifiziert werden!

~~1)~~ Maxwell-Gl. wurden experimentell bestätigt (Hertz, ...)

2) – wurde von meisten Physikern am Ende der 19. Jahrhundert akzeptiert

→ Bemühungen, die Bewegung der Erde relativ zum Äther zu beobachten

Michelson – Morley – Experiment (Michelson, 1881; Michelson, Morley, 1887)

→ Nullresultat:
die Geschwindigkeit des Lichtes ist unabhängig von der Richtung der Ausbreitung – trotz der Erde-Bewegung

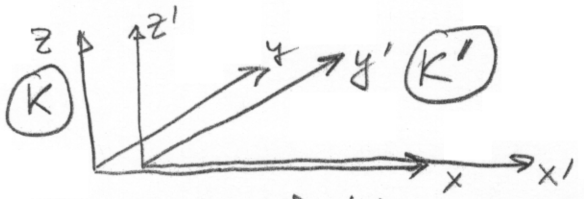
⇒ ~~2)~~ ⇒ 3)

Einstein - Relativitätsprinzip

Postulate:

1. Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen identisch
2. Lichtgeschwindigkeit ist gleich in allen Inertialsystemen und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle

② Lorentz - Transformationen



für $t=t'=0$ entsprechen $\vec{r}=0$ und $\vec{r}'=0$ demselben Ort

Ereignisse: — Punkte im 3+1=4-dimensionalen Raum-Zeit

Ereignis 1: vom Punkt $\vec{r}=0$ zum Zeitpunkt $t=0$ wird ein Signal mit der Lichtgeschwindigkeit ausgesandt

Ereignis 2: das Signal gelangt zur Zeit t zum Punkt $\vec{r}=(x,y,z)$

Lichtgeschwindigkeit $=c \implies \underline{x^2+y^2+z^2=c^2t^2}$

Analog im K': $\underline{x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2}$

Abstand s:

$$\boxed{s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2}$$

$$s'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$$

$$s^2=0 \longleftrightarrow s'^2=0$$

allgemein, für zwei Ereignisse (t_1,x_1,y_1,z_1) und (t_2,x_2,y_2,z_2)

$$s^2=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$$
$$=c^2(t_1-t_2)^2-(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2$$

Raum-Zeit-Kontinuum ist homogen und isotrop

$\implies$ Zusammenhang zwischen beiden Koordinatensystemen ist linear

$\Rightarrow \qquad S^2 = \lambda S'^2$

Rücktransformation $\rightarrow \quad \lambda = 1$

$$\boxed{S^2 = S'^2}$$

Geschwindigkeit $\vec{v}$ in x-Richtung $\rightarrow$

$x' = Ax + Bct$

$y' = y$

$z' = z$

$ct' = Cx + Dct$

$S^2 = S'^2 \Rightarrow x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$

$ct = i\tau \qquad ct' = i\tau'$

$x^2 + \tau^2 = x'^2 + \tau'^2$

$$\begin{cases} x' = Ax + iB\tau \\ \tau' = -iCx + D\tau \end{cases}$$

$A = D = \cos\alpha, \quad iB = iC = \sin\alpha$

$$\begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}$$

A, B, C, D müssen reell sein $\Rightarrow$ α ist imaginär

$\gamma = i\alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \alpha = -i\gamma$

$A = D = \cos\alpha = \cosh\gamma$

$B = C = -i\sin\alpha = -\sinh\gamma$

$x' = \cosh\gamma \cdot x - \sinh\gamma \cdot ct$

$ct' = -\sinh\gamma \cdot x + \cosh\gamma \cdot ct$

Der Usprung von K' bewegt sich in K mit der Geschwindigkeit v

$\Rightarrow \qquad x' = 0 \overset{!}{\Longleftrightarrow} x = vt$

$\Rightarrow \qquad \cosh\gamma \cdot x - \sinh\gamma \cdot ct = 0 \overset{!}{\Longleftrightarrow} x = vt$

$\Rightarrow \qquad c \cdot \tanh\gamma = v \qquad \Rightarrow \boxed{\tanh\gamma = \frac{v}{c}}$

$$\Rightarrow \quad \cosh\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \sinh\gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Lorentz-Transformation

Rücktransformation:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Zeitdilatation

Wir betrachten eine Uhr, die im System K' ruht

$x' = \text{const}$

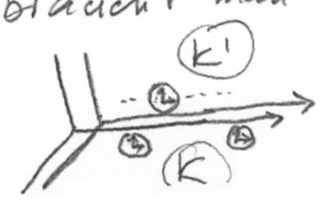
$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{– Zeitdilatation } (\Delta t > \Delta t')$$

$$\Rightarrow \quad t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\sqrt{1-v^2/c^2} < t_2 - t_1$$

"Eine bewegte Uhr geht langsamer"

Umgekehrt, geht die im System K ruhende Uhr, vom System K' beurteilt, im Vergleich zu Uhr in K' nach (d.h. langsamer)

Kein Widerspruch, da um die Uhren zu vergleichen, braucht man eine Zweite Uhr in einem System



$\Rightarrow$ der Vorgang ist nicht symmetrisch

<u>Eigenzeit</u>: Wir betrachten eine Uhr, die sich einer beliebigen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bezüglich eines IS K bewegt. [Im allgemeinen $\vec{v}(t) \neq$ const, d.h. das System, wo die Uhr ruht ist kein IS!]

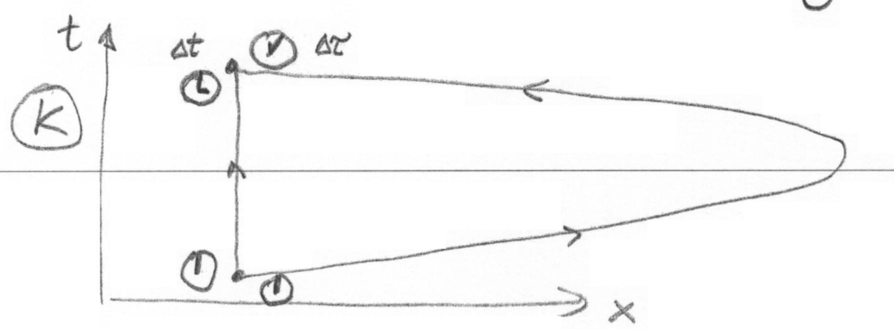
Zu jedem Zeitpunkt gibt es ein IS K', in dem sich die Uhr momentan in Ruhe befindet

$$d\tau \equiv dt' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; dt \quad , \quad v \equiv v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Eigenzeit – Lorentz-invariant
(d.h. unabhängig von der Wahl des Systems K)

$$\tau_2 - t_1 = \int_{(1)}^{(2)} dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

z.B. wird die Uhr, die eine geschlossene Bewegung ausführt (zurück zum Ausgangspunkt) im Vergleich mit da ruhender Uhr nachgehen



$\Delta\tau < \Delta t$

<u>Längenkontraktion</u>

zurück zur Lorentz-Transformation, S. 137
Wir betrachten nun einen Maßstab, der in K' ruht und in der Richtung der Bewegung (K' relativ zu K) ausgedehnt ist

$\Delta x' = x_2' - x_1'$, $\Delta x = x_2 - x_1$

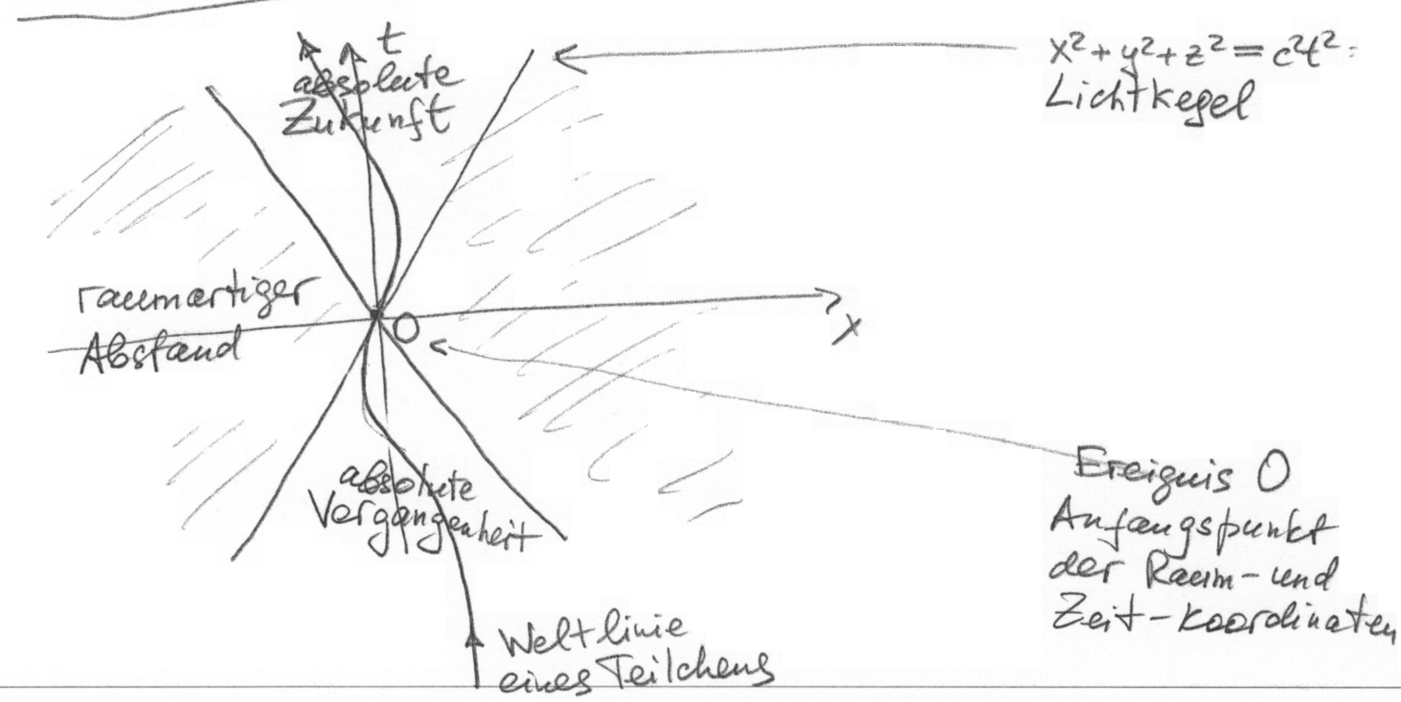
$t_2 = t_1$

$$\Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad \text{Längenkontraktion}$$

Die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung bleiben unverändert

Raum- und zeitartige Abstände



- $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} > 0$ – zeitartiger Abstand

  Es existiert ein System K', in dem die beide Ereignisse am selben Ort stattfinden ($\vec{r}\,' = 0$, $c^2t'^2 = s^2$)

  → absolute Zukunft $(t > 0)$,

  → absolute Vergangenheit $(t < 0)$

- $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} < 0$ – raumartiger Abstand

→ es gibt ein System, in dem die beide Ereignisse gleichzeitig sind $\left(t'=0, \quad \vec{r}'^2 = -s^2\right)$

→ in jedem Bezugssystem finden diese Ereignisse an verschiedenen Raum-Orten statt (die sind absolut entfernt)

- $s^2 = 0$ Lichtkegel
  Lichtartiger Abstand

Zwei Ereignisse können nur dann kausal verbunden sein, wenn der Abstand zwischen ihnen zeitartig ist $(s^2 > 0)$

Transformation der Geschwindigkeit

("Addition von Geschwindigkeiten")

K' bewegt sich in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu K

$\vec{u}$ – Geschwindigkeit eines Teilchens in K

$\vec{u}'$ – " – dieses – " – in K'

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u_y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{u_z'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + v u_x'/c^2}$$

Eigenschaften:

* Im Limes $c \to \infty$ bekommen wir die übliche Addition der Geschwindigkeiten der klassischen (Newton-) Mechanik:

$$u_x = u_x' + v \,, \quad u_y = u_y' \,, \quad u_z = u_z'$$

* Für den speziellen Fall $\vec{u}' \parallel x$-Achse ($u_x' = u'$, $u_y' = u_z' = 0$) bekommen wir

$$u_y = u_z = 0 \,, \qquad u_x \equiv u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}}$$

* Es ist einfach zu überprüfen, daß aus $|\vec{u}'| \leq c$ und $|\vec{v}| \leq c$ folgt $|\vec{u}| \leq c$
* Wenn $|\vec{u}'| = c$, $|\vec{v}|$ beliebig, bekommt man $|\vec{u}| = c$

(3) Vierervektoren, Tensoren und Lorentz-Gruppe

- (x^μ) $\mu = 0, 1, 2, 3$ 4-Vektor $(x^\mu) \equiv (ct, \vec{r})$

  $x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$

  – kontravarianter Komponenten des 4-Vektors (≡ kontravarianter 4-Vektor)

- (x_μ): $x_0 = ct \quad x_1 = -x \quad x_2 = -y \quad x_3 = -z$

  – kovariante Komponenten

$$\boxed{s^2 = x_\mu x^\mu}$$
$$\boxed{ds^2 = dx_\mu \, dx^\mu}$$

– Summationskonvention
– Summe $\sum_{\mu=0}^{3}$ über doppel auftretende Indizes (kovariant und kontravariant)

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ — der metrische Tensor

$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$, $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

$S^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$

der Raum mit der Metrik $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — Minkowski-Raum

Lorentz-Gruppe

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ — Lorentz-Transformation

$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$

$S^2 \equiv x_\mu x^\mu = S'^2 = x'_\mu x'^\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\beta \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$

$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$ $\quad \Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\alpha)$; $g = (g_{\mu\nu})$

$\rightarrow \det \Lambda = \pm 1$

zu vergleichen: übliche orthogonale Transformationen

$R^T R = 1$ (Rotationen), orthogonale

Solche Transformationen bilden eine Gruppe: $[O(3,1)]$

- Λ_1, Λ_2 — Lorentz-Transformationen
  $\Rightarrow \Lambda_1 \Lambda_2$ — Lorentz-Tr. :

$(\Lambda_1\Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T g \Lambda_1}_{g} \Lambda_2 = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g$

- Λ_1 — L.-T. $\Rightarrow \Lambda_1^{-1}$ — L.-T.

Die Lorentz-Gruppe ist 6-parametrisch:
3 Rotationen + 3 Lorentz-Boosts

Rotationen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad xz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad yz$$

Boosts

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma & 0 & 0 \\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\gamma & & & \\ & 1 & & \\ & & \cosh\gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad y$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\gamma & 0 & 0 & -\sinh\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\gamma & 0 & 0 & \cosh\gamma \end{pmatrix} \qquad z$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tanh\gamma &= \frac{v}{c} \\ \cosh\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \sinh\gamma &= \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Eigentliche Lorentz-Gruppe:
nur die Lorentz-Transformationen, die stetig mit Identität zusammenhängen.

Die volle L.-G. besteht aus 4 zusammenhängen Komponenten

1) beinhaltet I – eigentliche L.-G.

2) — " — $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ – zeitliche Spiegelung

3) — " — $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ – räumliche Spiegelung

4) — " — $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ räumliche und zeitliche Spiegelung

$$\boxed{\text{Eigentliche L.-G.:} \quad \Lambda^T g \Lambda = g, \quad \det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 > 0}$$

Tensordefinitionen

Def.
$T^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$ – (kontravarianter) Lorentz-Tensor N-ter Stufe
$\Longleftrightarrow$ T transformiert sich bei Lorentz-Transformation wie folgt:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \Lambda^{\alpha_2}{}_{\beta_2} \dots \Lambda^{\alpha_N}{}_{\beta_N} T^{\beta_1 \dots \beta_N}$$

$N = 0$ — Lorentz-Skalar: $T' = T$

$N = 1$ — Lorentz-Vektor: $T'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} T^{\beta}$ –

– transformiert sich wie die <u>Koordinaten x^{α}</u>

. . . .

Kovariante Komponenten von Tensoren

$$T_{\alpha} = g_{\alpha\beta} T^{\beta}$$

$$T_{\alpha_1 \alpha_2} = g_{\alpha_1 \beta_1} g_{\alpha_2 \beta_2} T^{\beta_1 \beta_2} \quad \text{usw.}$$

Man kann auch gemischte ko-kontra-varianten Komponenten betrachten:

z. B. $\quad T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1 \beta_1} T^{\beta_1 \alpha_2}$

Für den metrischen Tensor g gilt

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad \text{(Kronecker-Symbol)}$$

Transformation der kovarianten Tensoren

$$T'_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \Lambda_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \Lambda_{\alpha_2}{}^{\beta_2} \dots \Lambda_{\alpha_N}{}^{\beta_N} T_{\beta_1 \dots \beta_N} ,$$

$$\underbrace{\Lambda_\alpha{}^\beta}_{\substack{\text{Matrix der}\\ \text{kovar. Transform. } (\bar\Lambda)}} = g_{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu}_{\substack{\text{Matrix der kontravar. Transf.}\\ (\Lambda)}} \qquad \boxed{\Leftrightarrow \bar\Lambda = g\Lambda g}$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta = \delta_\alpha^\beta} \qquad (*) \qquad \boxed{\Leftrightarrow \Lambda^T \bar\Lambda = \mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{-1} = \bar\Lambda^T$$

4 – Gradient

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ – ? 4-Vektor? Ko- oder kontra-variant?

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

$$= \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \\ \text{(wir haben } (*) \text{ benutzt)} \end{gathered}}$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ist ein <u>kovarianter</u> Vektor

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

Entsprechend ist $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ein kontravarianter Vektor,

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

D'Alambert – Operator

$$-\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^\alpha \partial_\alpha \quad \text{– Lorentz – Skalar}$$

4 – Geschwindigkeit

$$x^\mu(t) \equiv (ct, \vec{r}(t)) \quad , \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

4 – Geschwindigkeit

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(c, \vec{v})$$

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}\, dt$$ – Eigenzeit (Lorentz – invariant)

$\Rightarrow$ u^μ ist wie dx^μ Lorentz - Vektor

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$$

$$u^\mu u_\mu = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2$$

Operationen mit Tensoren

- Addition $\quad a S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} + b T^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$ – Tensor der Stufe N
- Multiplikation $\quad S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} T^{\beta_1 \dots \beta_M}$ – Tensor der Stufe $N+M$
- Kontraktion $\quad g_{\alpha\beta} S^{\gamma_1 \dots \alpha \dots \beta \dots \gamma_N}$ – Tensor der Stufe $N-2$

- Tensorgleichungen

z.B. $S^\alpha = U^{\alpha\beta} T_\beta$ gilt in allen IS, da beide Seiten transformieren sich identisch

$$S'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu S'^\mu$$

$$U'^{\alpha\beta} T_\beta' = \Lambda^\alpha{}_\mu \underbrace{\Lambda^\beta{}_\nu U^{\mu\nu} \Lambda_\beta{}^\rho}_{\to \delta^\rho_\nu} T_\rho = \Lambda^\alpha{}_\mu U^{\mu\nu} T_\nu$$

(4) Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

„Kovarianz" bedeutet hier Forminvarianz (Lorentz-Tensorgleichungen haben die gleiche Form in allen IS)

Ladungs- und Stromdichte als 4-Vektor

$$\vec\nabla \cdot \vec j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$j^\mu \equiv (c\rho, \vec j)$ – zunächst nur eine Definition, werden bald sehen, dass j^μ wirklich ein 4-Vektor ist

Kont.-Gl. $\Rightarrow$ $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ (*)

(oder äquivalent $\partial^\mu j_\mu = 0$)

– kovariante Form

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec\nabla\right) \\ \partial^\mu &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec\nabla\right) \\ j_\mu &= (c\rho, -\vec j) \end{aligned}}$$

∂_μ – 4-Vektor $\Rightarrow$ Hinweis dafür, dass j^μ ein (kontravarianter) 4-Vektor ist

Das kann man auch direkt überprüfen

$$j^\mu = (c\rho, c\vec v) = \rho(c, \vec v) = \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}\, u^\mu$$

Hier $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \vec v)$ – 4-Vektor

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$ — Ladung

dV — Volumenelement

$$= \frac{dq}{dV_0\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

dV_0 — Volumenelement im Ruhesystem

$$dV = dV_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Längenkontraktion

$$\Rightarrow \rho\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{dq}{dV_0}$$ — 4-Skalar

Damit folgt aus $j^\mu = \rho\sqrt{1-v^2/c^2}\, u^\mu$, dass j^μ ein 4-Vektor ist

Kommentar: wir haben hier benutzt, daß die Ladung dq ein Lorentz-Skalar ist.

Alternativ kann man das als ein Beweis der Lorentz-Invarianz der Ladung betrachten, wenn man postuliert, daß j^μ ein 4-Vektor ist

4-Potential

$$A^\mu \equiv (\varphi, \vec{A})$$ — zunächst nur eine Definition

Lorentz-Eichung:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad (**)$$

Lorentz-invariante Form!

$$\left.\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi &= -4\pi\rho \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}\right| \Rightarrow -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = -\partial_\nu\partial^\nu = \Box$$

$$\boxed{\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu} \quad (***)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Box - \text{4-Skalar} \\ &j^\mu - \text{4-Vektor}\end{aligned}\right| \Rightarrow A^\mu - \text{4-Vektor}$$

(*), (**), (***) — Kovariante Gleichungen

(*): Kontin.; (**): Lorenz-Eichung; (***): Maxwell-Gl. für A^μ

Elektromagnetischer Feldtensor, Maxwell-Gl. für $\vec{E}, \vec{B}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

antisymmetrischer Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{\mu\nu}$ – Lorentz-Tensor 2. Stufe

$$\boxed{F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \xRightarrow[\partial_\mu A^\mu = 0]{} \partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \quad (1)$$ inhomogene Maxwell-Gl. in kovar. Form

$\nu = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$

$\nu = 1,2,3 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Homogene Maxwell-Gl. folgen automatisch aus $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$:

wir definieren den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} =$$

völlig antisymm., $\epsilon^{0123} = 0$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad (2)$$ homogene Maxwell-Gl.

$\nu = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\nu = 1,2,3 \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Kommentare:

- (2) kann man (mit Benutzung der Asymmetrie von $F^{\mu\nu}$) äquivalent in der folgenden Form schreiben

$$\boxed{\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\alpha} = 0} \quad (2')$$

- Die Gleichungen (1), (2) wären symmetrischer wenn die homogenen Gleichungen durch $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu_{mag}$ ersetz würden.

Das würde bedeuten, dass es magn. Quellen gibt — mag. Monopole. Experimente zeigen, dass es aber keine gibt

5. Lorentz-Transformation der el/mag Felder

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x, y, z \to 1, 2, 3$$

z.B betrachten einen Boost in x-Richtung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma & 0 & 0 \\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tanh\gamma = \frac{v}{c}$$

$$E_2' = F'^{20} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_\beta F^{2\beta}$$

$$= \cosh\gamma \cdot E_2 - \sinh\gamma \cdot B_3$$

usw. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} E_1' &= E_1 \\ B_1' &= B_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\vec{E}_\parallel' = \vec{E}_\parallel \,,\ \vec{B}_\parallel' = \vec{B}_\parallel}$$

$$\left.\begin{aligned} E_2' &= \cosh\gamma \cdot E_2 - \sinh\gamma \cdot B_3 \\ E_3' &= \cosh\gamma \cdot E_3 + \sinh\gamma \cdot B_2 \end{aligned}\right| \longrightarrow \boxed{\vec{E}_\perp' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}\times\vec{B}_\perp}{c}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} B_2' &= \cosh\gamma \cdot B_2 + \sinh\gamma \cdot E_3 \\ B_3' &= \cosh\gamma \cdot B_3 - \sinh\gamma \cdot E_2 \end{aligned}\right| \longrightarrow \boxed{\vec{B}_\perp' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{c}\right)}$$

Rücktransformation $(\vec{v} \to -\vec{v})$:

$$\vec{E}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{E}_\perp' - \frac{\vec{v}\times\vec{B}_\perp'}{c}\right) \qquad \vec{E}_\parallel = \vec{E}_\parallel'$$

$$\vec{B}_\parallel = \vec{B}_\parallel'$$

$$\vec{B}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{B}_\perp' + \frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp'}{c}\right)$$

El. und mag. Felder werden durch Lorentz-Transformationen "gemischt"!

6. Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{r^3}, \quad \vec{B}' = 0 \;—\; \text{im IS } K', \text{ in dem die Ladung ruht}$$

Im IS K die Ladung bewegt mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} \parallel x$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$E_x = E_x' = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q(x - vt)}{r'^3\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad r'^3 = \left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}$$

$$E_y = \frac{E_y'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qy'}{r'^3\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E_z = \frac{E_z'}{\sqrt{}} = \frac{qz'}{r'^3\sqrt{}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{r'^3\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vt, y, z)}$$

$$B_x = B_x' = 0$$

$$B_y = -\frac{qvz'}{cr'^3\sqrt{}} = -\frac{qvz}{cr'^3\sqrt{}}$$

$$B_z = \frac{qvy'}{cr'^3\sqrt{}} = \frac{qvy}{cr'^3\sqrt{}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{qv}{cr'^3\sqrt{1 - v^2/c^2}}(0, -z, y)}$$

Limes $v \ll c$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}'_{nr}}{r'^3_{nr}} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \vec{r}'_{nr} = (x - vt, y, z)$$

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\underbrace{\frac{\vec{v} \times \vec{r}'_{nr}}{r'^3_{nr}}}_{O\left(\frac{v}{c}\right)} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} \sim \frac{v}{c}$$

$$\frac{F_{mag}}{F_{Coul}} \sim \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

$\Rightarrow$
Magnetische Effekte sind klein in $v/c \ll 1$

- Beschleunigte Ladungen, Liénard-Wichert-Potentiale, Strahlung – Fließbach Kap. 23

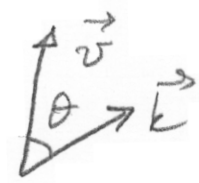
7. Dopplereffekt

Nichtrelativistischer Fall, z.B. Schall

$\delta p = \delta p_0 e^{-i\varphi}$, $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ Schallwelle

ω - Schallfrequenz im Ruhesystem (Sender und Beobachter beide in Ruhe im Ruhesystem des Mediums)

• Beobachter bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$,
Sender in Ruhe:



$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ K' - das System, in dem der Beobachter ruht

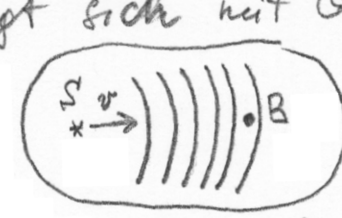
$$\varphi = \omega t - \vec{k}(\vec{r}' + \vec{v}t) = \omega' t - \vec{k}\vec{r}'$$

$$\omega' = \omega - \vec{k}\vec{v} = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

c - Schallgeschwindigkeit

• Beobachter ruht, Sender bewegt sich mit Geschw. $\vec{v}$

$$\to \dots \to \quad \omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$



Relativistischer Fall: El/mag Wellen (Licht)

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\varphi}$ $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = k_\mu x^\mu$

φ - Lorentz-Skalar (Phase) $\quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$
$(\varphi = k_\mu x^\mu = k'_\mu x'^\mu)$

Beweis: die Phasendifferenz gibt Anzahl der Knoten der el/mag. Welle; die Knoten ($\vec{E} = \vec{B} = 0$) bleiben bei der Lorentz-Transformation erhalten ∎

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ - 4-Skalar} \\ x^\mu \text{ - 4-Vektor}\end{array}\right| \Rightarrow k^\mu$ - 4-Vektor

Fourier-Transformation: $k^\mu \Leftrightarrow -i\partial^\mu$

$$k^\mu k_\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$$

Wir betrachten jetzt die Situation der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Senders relativ zu Beobachter (kein Medium, nur relative Geschwindigkeit wichtig!)

K – Ruhesystem des Senders

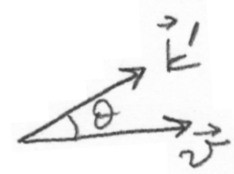
K' — — " — des Beobachters

$\omega = c|\vec{k}|$, $\omega' = c|\vec{k}'|$

ω: Frequenz, die die Quelle sendet

ω': Frequenz, die der Beobachter misst

$$k_x = \frac{k_x' - \frac{v\omega'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega = \frac{\omega' - v k_x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad k_y = k_y', \; k_z = k_z'$$



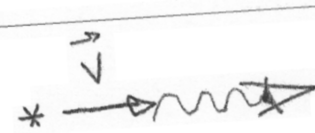
$$v k_x' = v k' \cos\theta = \frac{v\omega'}{c}\cos\theta$$

θ – Winkel zwischen $\vec{v}$ und der Ausbreitungsrichtung $\vec{k}'$ der Welle in IS des Beobachters

$$\omega = \frac{\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{}}$$

$$\boxed{\omega' = \omega\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}}$$

- $\cos\theta = \pm 1$ $\quad \left(\theta = {0 \atop \pi}\right)$

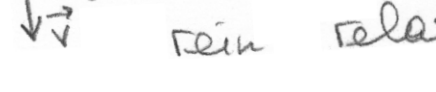


$\Rightarrow$ longitudinaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \omega\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 \mp \frac{v}{c}} = \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \xrightarrow{v \to c} \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$$

- $\cos\theta = 0$ $\quad (\theta = \pi/2)$ $\quad$ transversaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \omega\sqrt{1-v^2/c^2}$$



rein relativistisch

8. Relativistische Mechanik eines geladenen Teilchen im el/mag Feld

- Freies relativistisches Teilchen

Wirkung S: Prinzip der kleinsten (stationären) Wirkung

S muß Lorentz-invariant sein → Skalar

$$\boxed{c\,d\tau = ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = \sqrt{c^2 dt^2 - \vec{v}^2 dt^2}}$$

$$\boxed{d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$S = -mc\int_{(1)}^{(2)} ds = -mc^2 \int_{(1)}^{(2)} d\tau$$

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt \;\to\; \boxed{L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Lagrange-Funktion

Impuls: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial v_i} = \dfrac{m v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$

Energie: $\mathcal{E} = \vec{p}\vec{v} - L = \dfrac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$v = 0 \to \mathcal{E} = mc^2$ – Ruhe-Energie

$v \ll c \to E \simeq mc^2 + \dfrac{mv^2}{2}$

4-Impuls:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(c, \vec{v}) = m u^\mu$$

$u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ – 4-Geschwindigkeit

u^μ – 4-Vektor $\Rightarrow$ p^μ – 4-Vektor

$$p^\mu p_\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

Bemerkung: $m=0 \Longrightarrow \mathcal{E} = cp$ (Photonen; gilt näherungsweise für ultrarelativistische Teilchen mit $v \approx c$)

- Teilchen in el/mag Feld

Wir erwarten eine kovariante Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \equiv m\frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \leftarrow \text{4-Kraft}$$

Wir erwarten, dass f^μ linear in Felder ($F^{\mu\nu}$), linear in der Geschw. u^μ und proportional zu Ladung q ist $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu} \qquad (*)$$

Das ist die richtige Gleichung, weil
(1) sie Lorentz-kovariant ist
(2) im IS K' wo das Teilchen ruht:

$\vec{v}' = 0$, $dt' = d\tau \rightarrow \frac{du'^\alpha}{d\tau} = \left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} u^\mu = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{}} \\ d\tau = dt\sqrt{} \end{array}}$$

$\Rightarrow$ linke Seite von $(*)$ $= (0, m\,d\vec{v}'/dt)$

Rechte Seite von $(*)$ $= \frac{q}{c}F'^{\mu\nu}u'_\nu = \frac{q}{c}F'^{\mu 0}\underbrace{u'_0}_{= c} = qF'^{\mu 0} =$
$= (0, q\vec{E}')$ ∎

$(*) \Longrightarrow$

$\mu=0$: $\quad \frac{d}{dt}\mathcal{E} = q\vec{E}\cdot\vec{v} \qquad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Leistung der Lorentzkraft

$\mu=1,2,3$: $\quad \frac{d}{dt}\vec{p} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Lorentzkraft (hat dieselbe Form wie in der nichtrelativist. Mechanik)

- Wirkung und Lagrange-Funktion für ein Teilchen im el/mag Feld

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc\,ds - \frac{q}{c}A_\mu dx^\mu\right) \qquad \text{Wirkung}$$

Wir zeigen, daß diese Wirkung zu den oben gegebenen Bewegungsgleichungen führt

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt \rightarrow L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v}$$

$$\boxed{L(\vec{r},\vec{v},t) = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} - q\varphi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)}$$

Lagrange-Funktion

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{q}{c}A_i = p_i + \frac{q}{c}A_i$$

kanonischer Impuls (P_i)

kinematischer Impuls (p_i) $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{}$

- Bewegungsgleichung

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r_i} \rightarrow \frac{dP_i}{dt} = -q\frac{\partial\varphi}{\partial r_i} + \frac{q}{c}v_j\frac{\partial A_j}{\partial r_i}$$

einsetzen $\quad -\frac{\partial A_i}{\partial r_j} + \frac{\partial A_i}{\partial r_j}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -q\vec{\nabla}\varphi + \frac{q}{c}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$= -q\vec{\nabla}\varphi + \frac{q}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \qquad (*)$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \qquad (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q\vec{\nabla}\varphi + \frac{q}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

- Energie und Hamilton-Funktion

$$\mathcal{E} = \vec{P}\vec{v} - L = \vec{p}\cdot\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - L = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\mathcal{E}_{kin}} + q\varphi$$

$$= \mathcal{E}_{kin} + q\varphi$$

früher wurde als $\mathcal{E}$ bezeichnet

Hamiltonfunktion muß durch P (kanon. Impuls) ausgedrückt werden

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} + q\varphi = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\varphi$$

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2} + q\varphi$$

Hamilton-Funktion

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{kin} = q(\vec{E} + \underbrace{\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}}_{\to \text{ keinen Beitrag}})\cdot\vec{v}$$ Leistung der Lorentz-Kraft (siehe p. 159 oben)

9. Elektrodynamik als Feldtheorie: Lagrangeformalismus

Lagrangefunktion für N Teilchen

$$L = L(\underbrace{\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots \vec{v}_N}_{\text{Freiheitsgrade } \vec{r}_i, \vec{v}_i, \quad i = 1 \dots N}, t)$$

Feld, z.B. $\vec{E}(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ usw: $\vec{E}(\vec{r})$

Freiheitsgrade: $\vec{E}$; "Index" (kontinuierlich): $\vec{r}$

Beispiel: skalares Feld $\varphi(\vec{r}, t)$

$L = L[\varphi, \dot{\varphi}; t]$ — Lagrangefunktion, Funktional der unendlich vielen Variabel ($\varphi, \dot{\varphi}$ in allen Punkten $\vec{r}$)

$$L = \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi(\vec{r}), \nabla\varphi(\vec{r}), \dot{\varphi}(\vec{r}))$$

$\mathcal{L}$: Lagrangedichte

$$S = \int dt \, L = \int dt \, d^3x \, \mathcal{L}(\varphi(\vec{r}), \nabla\varphi(\vec{r}), \dot{\varphi}(\vec{r})) \quad \text{Wirkung}$$

z.B. $\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \frac{1}{2}C\varphi^2 - \frac{1}{4}D\varphi^4$

$$= \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2}C\varphi^2 - \frac{1}{4}D\varphi^4$$

- Bewegungsgleichungen

Prinzip der stationären (kleinsten) Wirkung

$$\delta S = \int dt \, d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_i \varphi)}\delta\nabla_i\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right] \overset{\text{P.I.}}{=\!=}$$

$$= \int dt \, d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi - \left(\nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_i \varphi)}\right)\delta\varphi - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) \cdot \delta\varphi\right] + \cancel{\;\;}$$

$$= \int dt\, d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_i \varphi)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right] \delta\varphi \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_i \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}}$$ Bewegungsgleichung (*)

Im Beispiel oben

$$\rightarrow \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \nabla^2 \varphi = -C\varphi - D\varphi^3$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi = -C\varphi - D\varphi^3$$

Bewegungsgleichung in kovarianter Form:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

- Wirkung für el/mag Feld + Teilchen
  * Teilchen: $S_{mech} = -mc \sum_i \int ds_i$
  * Feld: $S_{em} = \frac{1}{c}\int d^4x\, \mathcal{L}_{em}$ – Lorentz-Skalar $\boxed{d^4x = c\,dt\,d^3x}$
    – quadratisch in Felder $F^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{em} \propto F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left[\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right]$$

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

  * Kopplung $S_{koppl} = -\sum_i \int \frac{q}{c} A_\mu(x_i)\, dx_i^\mu$

$$\rightarrow -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, j^\mu A_\mu$$

$$\boxed{S = S_{mech} - \frac{1}{c}\int d^4x \left[\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right]}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- Bewegungsgleichungen für el/mag Feld:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad - \text{ Maxwell-Gl}$$

- Energie – Impuls – Tensor

* Skalarfeld $\quad S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial^\mu\varphi)$

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu\varphi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\varphi)} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad \text{Energie-Impuls-Tensor}$$

Bewegungsgleichung $\rightarrow$ $\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$ Erhaltungssatz

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int_V d^3r\, T^{\mu 0} = \text{const} \quad 4\text{-Impuls-Erhaltung}$$

* el/mag Feld

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right)$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w_{em} & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & & & \\ S_y/c & & -\sigma_{ij} & \\ S_z/c & & & \end{pmatrix}$$

$w_{em} = \dfrac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}$, (Energie-Dichte) $\quad \vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$ – Poynting-Vektor

$= c^2 \vec{g}_{em}$; $\vec{g}_{em}$ – Impuls-Dichte

$\sigma_{ij} = \dfrac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \dfrac{\delta_{ij}}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right]$ Maxwellscher Spannungstensor (T_{ij} in Kapitel III)

$\rightarrow$ Energie-Impuls-Erhaltung in kovar. Form