Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. B. Narozhny

Blatt 1:Lösungen

Besprechung 25.10.2013

---

1. Dirac'sche Deltafunktion:

(a) Zu zeigen sind jeweils, dass die definierenden Eigenschaften

$$\int_a^b dx\ f(x)\ \delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls} \quad x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

und die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-x_0) = 1 \tag{2}$$

erfüllt sind.

Beginnen wir mit der Darstellung

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} L_\epsilon(x-x_0) \quad \text{mit} \quad L_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}.$$

Da $\delta(x-x_0)$ eine Distribution ist, muss man den $\lim_{\epsilon\to 0}$ so interpretieren, dass er immer nach dem Integral gezogen wird, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) L_\epsilon(x-x_0),$$

wo die Schreibweisen $\delta(x-x_0)$ für die Distribution selbst sowie $\lim_{\epsilon\to 0} L_\epsilon(x-x_0)$ für den Limes symbolisch zu betrachten sind.
Damit ist Ihre **Norm**:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\epsilon}\frac{1}{\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{y^2+1} \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Zeigen wir nun **Eigenschaft** (1):
die Funktion

$$L_\epsilon(x-x_0) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)^2+1}$$

entspricht für festes ϵ einer Lorentzkurve um x_0 mit Höhe $\frac{1}{\epsilon}$, die bei $x_0 \pm \epsilon$ auf die Hälfte ihrer Höhe abfällt. Für $\epsilon \to 0$ wird die Funktion also immer steiler bei x_0 und fällt nach außen hin immer schneller ab. Weil die Hauptbeiträge zum Integral in (1) nur an Stellen sein können, an denen $L_\epsilon(x-x_0)$ wesentlich von 0 verschieden ist, kann man die Funktion $f(x)$ durch ihren Wert an dieser Stelle nähern:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x) L_\epsilon(x-x_0) = f(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx L_\epsilon(x-x_0).$$

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ verschwindet das Integral im Parameterbereich fern von x_0. Ist x_0 nicht in $[a,b]$ enthalten, so ist dieser Bereich auf der Skala von ϵ automatisch fern von x_0 und das Integral verschwindet. Andernfalls kann man zum Integral eine Null in Form der Bereiche $]b,\infty[$ und $]-\infty,a[$ dazu addieren und erhält mit der Normierungsbedingung (2)

$$f(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx L_\epsilon(x-x_0) = f(x_0). \tag{4}$$

Wir wollen kurz zeigen, warum wir die Ersetzung $\mathbf{f(x)} \to \mathbf{f(x_0)}$ durchführen dürfen. Statt der Ersetzung verwenden wir dazu eine Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_0:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x) L_\epsilon(x-x_0) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x_0) L_\epsilon(x-x_0) \\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}(x-x_0)^n L_\epsilon(x-x_0) \\
&= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\int_a^b \frac{dx}{\epsilon}\frac{\left(\frac{x}{\epsilon}-\frac{x_0}{\epsilon}\right)^n}{\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)^2+1} \\
&\overbrace{=}^{y\equiv\frac{x-x_0}{\epsilon}} f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\int_{\frac{a-x_0}{\epsilon}}^{\frac{b-x_0}{\epsilon}} dy\frac{(y)^n}{y^2+1}.
\end{aligned}$$

Zum Integral tragen für $\epsilon \to 0$ hauptsächlich die Parameterbereiche mit $y \gg 1$ bei. Deshalb können wir den Ausdruck abschätzen zu

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x) L_\epsilon(x-x_0) &\simeq f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\int_{\frac{a-x_0}{\epsilon}}^{\frac{b-x_0}{\epsilon}} dy\,(y)^{n-2} \\
&= f(x_0) + f'(x)|_{x=x_0}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\left(\frac{b-x_0}{a-x_0}\right) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{b-x_0}{\epsilon}\right)^{n-1}-\left(\frac{a-x_0}{\epsilon}\right)^{n-1}\right] \\
&= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon \\
&= f(x_0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Als nächstes betrachten wir die Darstellung

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(x-x_0) \quad \text{mit} \quad G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2}.$$

Die **Norm** ist

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\epsilon}\epsilon e^{-x^2/\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\pi} \\
&= 1. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Um **Eigenschaft** (1) zu zeigen, diskutieren wir die Kurve von

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \epsilon} e^{-(x-x_0)^2/\epsilon^2}.$$

Hierbei handelt es sich um eine Gaußkurve um x_0 mit Höhe $\frac{1}{\sqrt{\pi}\ \epsilon}$, die bei $x_0 \pm \epsilon$ auf das e^{-1}-fache ihres maximalen Wertes abfällt. Ab hier kann analog zum ersten Fall argumentiert werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x) G_\epsilon(x-x_0) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx f(x_0) G_\epsilon(x-x_0) \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)|_{x=x_0}}{n!}(x-x_0)^n G_\epsilon(x-x_0) \\
&= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\int_a^b\frac{dx}{\epsilon}\left(\frac{x}{\epsilon}-\frac{x_0}{\epsilon}\right)^n e^{-(x-x_0)^2/\epsilon^2} \\
&\overbrace{=}^{y\equiv\frac{x-x_0}{\epsilon}} f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\int_{\frac{a-x_0}{\epsilon}}^{\frac{b-x_0}{\epsilon}} dy y^n e^{-y^2} \\
&= f(x_0), \qquad (7)
\end{aligned}$$

da

$$\left|\int_{\frac{a-x_0}{\epsilon}}^{\frac{b-x_0}{\epsilon}} dy y^n e^{-y^2}\right| < \int_{-\infty}^{\infty} dy |y|^n e^{-y^2} = 2\int_0^{\infty} y^n e^{-y^2} = \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right), \qquad (8)$$

und damit

$$\frac{1}{n!}\left|\int_{\frac{a-x_0}{\epsilon}}^{\frac{b-x_0}{\epsilon}} dy y^n e^{-y^2}\right| < \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1} n\Gamma(n/2)} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0, \qquad (9)$$

wobei $\Gamma(z)$ die Gammafunktion ist (s. http://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion).

(b) zu zeigen:

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n).$$

Dazu erinnern wir uns, dass die Deltadistribution nur in Verbindung mit einer Integration definiert ist. Das Integral hat nur Beiträge in Regionen um die Nullstellen im Integrationsbereich im Argument der Deltadistribution. Wir können das Integral in eine Summe über diese Teilbeiträge aufsplitten:

$$\int_\gamma dx\delta(g(x))f(x) = \sum_n \int_{x_n-\frac{\delta}{2}}^{x_n+\frac{\delta}{2}} dx\delta(g(x))f(x),\ \delta \ll \text{ Nullstellenabstände.}$$

Die Funktion $g(x)$ können wir in dem jeweiligen Bereich um die Nullstellen Taylorentwickeln:

$$g(x) = g(x_n) + g'(x)|_{x=x_n}(x-x_n) + \cdots = g'(x)|_{x=x_n}(x-x_n) + \cdots$$

Nun können wir die einzelnen Integrationsbereiche wieder auf den ursprünglichen Integrationsbereich oder sogar auf $[-\infty,\infty]$ ausweiten. Der Grund ist, dass die Taylorentwickelten Funktionen nun linearisiert sind und keine weiteren Nullstellen mehr enthalten, sodass keine weiteren Bereiche zum Integral beitragen:

$$\sum_n \int_{x_n-\frac{\delta}{2}}^{x_n+\frac{\delta}{2}} dx\delta(g(x))f(x) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g'(x)|_{x=x_n}(x-x_n))f(x).$$

Den Vorfaktor $g'(x)$ können wir durch Substitution $y = g'(x_n)x$ eliminieren:
Gilt $g'(x) > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(g'(x)|_{x=x_n}(x-x_n))f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1}{g'(x)|_{x=x_n}}\delta\left(x - g'(x)|_{x=x_n}x_n\right) f\left(\frac{y}{g'(x)|_{x=x_n}}\right)\\ &= f(x_n)\frac{1}{g'(x)|_{x=x_n}}, \end{aligned} \tag{10}$$

Gilt $g'(x) < 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(g'(x)|_{x=x_n}(x-x_n))f(x) &= \int_{\infty}^{-\infty} dy\frac{1}{g'(x)|_{x=x_n}}\delta\left(x - g'(x)|_{x=x_n}x_n\right) f\left(\frac{y}{g'(x)|_{x=x_n}}\right)\\ &= f(x_n)\frac{-1}{g'(x)|_{x=x_n}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Vergleichen wir nun die Integranden:

$$\begin{aligned}\int_\gamma dx\delta(g(x))f(x) &= \sum_n \left|\frac{1}{g'(x)|_{x=x_n}}\right| \int_\gamma dx\delta(x-x_n)f(x)\\ \to \delta(g(x)) &= \sum_n \left|\frac{1}{g'(x)|_{x=x_n}}\right| \delta(x-x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

(c) Berechne

$$\int_0^\infty dx f(x)\delta(g(x)) = \int_0^\infty dx x^2\delta(x^2-6x+8).$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= g(x)\\ &= x^2 - 6x + 8\\ &= (x-2)(x-4)\\ \to x_1 = 2,\ x_2 = 4. \end{aligned} \tag{13}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} |g'(x)|_{x=2}| &= 2 \\ |g'(x)|_{x=4}| &= 2. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}4^2 = 10.$$

(d) Berechne

$$\int_0^\infty dx f(x)\delta(x - b + \sqrt{x^2+a^2}).$$

Nullstellen (existieren nur für $b > 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= x - b + \sqrt{x^2+a^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+a^2} &= b - x \\ \Leftrightarrow x^2 + a^2 &= (b-x)^2 \\ \rightarrow x_0 &= \frac{b^2-a^2}{2b}. \end{aligned} \tag{15}$$

x_0 nur im Parameterbereich, wenn $b > |a|$.
Ableitung:

$$\begin{aligned} |g'(x)|_{x=x_0}| &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}|_{x=\frac{b^2-a^2}{2b}} \\ &= 1 + \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \\ &= \frac{2b^2}{b^2+a^2} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dx f(x)\delta(g(x)) = \theta(b)\theta(b-|a|)\frac{b^2+a^2}{2b^2} f\left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right).$$

(e) Zeigen wir zunächst die **erste Eigenschaft**. Es gilt:

$$f(x) = 0 \,\forall\, x \in R \leftrightarrow \int_{-\infty}^\infty dx\, |f(x)| = 0. \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dx\, |x\delta\,(x)| &= \int_{-\infty}^\infty dx\, |x|\,\delta\,(x) \\ &= |0| \\ \leftrightarrow x\delta\,(x) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Hierbei verwendeten wir, dass die Deltadistribution durch den Grenzwert von positiv semidefiniten Funktionen dargestellt werden kann.

Die **zweite Eigenschaft** zeigen wir mit Hilfe der partiellen Integration und der Tatsache, dass $x - x_0$ bei $\pm\infty$ keine Nullstellen hat:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dx\delta'(x-x_0)f(x) &= [\delta(x-x_0)f(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty dx\delta(x-x_0)f'(x) \\ &= -f'(x_0). \end{aligned} \tag{19}$$

1. Nabla-Operator

In kartesischen Koordinaten $x_i = (x, y, z)$ ist der Nabla-Operator definiert als:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i = \vec{e}_i \partial_i \tag{1}$$

wobei wir die partielle Ableitung definiert haben als:

$$\partial_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

und wir in Zukunft die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Hierbei wird über doppelt auftretende Indizes automatisch von 1-3 summiert.

Nabla-Operator in beliebigen (rechtwinkligen) Koordinatensystemen

Wir wollen nun unser System nicht in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$, sondern durch andere Koordinaten $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ((z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten) darstellen. Der Ortsvektor soll also durch:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ y(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ z(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{pmatrix} \tag{3}$$

dargestellt werden. Als Beispiel seien Kugelkoordinaten erwähnt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\phi \sin\theta \\ r \sin\phi \sin\theta \\ r \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wir wollen den Nabla-Operator nun in diesen Koordinaten schreiben, also mache den Ansatz:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \partial_i = \sum_i \vec{e}_{\theta_i} c_i \tag{5}$$

wobei c_i eine Ableitung ∂_{θ_i} enhalten soll und die neuen normierten Einheitsvektoren geschrieben werden können als:

$$\vec{e}_{\theta_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i} \qquad \text{mit } h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i}\right| \tag{6}$$

Wir nehmen des weiteren an, dass die Koordinaten lokal senkrecht sind, die $\vec{e}_{\theta_i}$ also alle senkrecht aufeinander stehen (was sie im Falle der wichtigen Koordinaten wie Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten auch sind), also:

$$\vec{e}_{\theta_i} \cdot \vec{e}_{\theta_j} = \delta_{ij} \tag{7}$$

Wir wollen nun die c_i bestimmen, was wir mit Hilfe von (7) einfach machen können, indem wir (5) mit $\vec{e}_{\theta_j}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{\theta_j} \cdot \sum_i \vec{e}_{\theta_i} c_i = \vec{e}_{\theta_j} \vec{\nabla} \\
c_j = \vec{e}_{\theta_j} \vec{\nabla} &= \frac{1}{h_j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_j}\vec{\nabla} = \frac{1}{h_j}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \frac{1}{h_j}\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{h_j}\partial_{\theta_j}
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei wir für den letzten Schritt einfach die Wirkung von $\partial\theta_i$ auf eine Funktion $f(\vec{x})$ betrachten müssen:

$$\partial_{\theta_j} f(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Es gilt mit (5) und (8) nun also:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_{\theta_i}\frac{1}{h_i}\partial_{\theta_i} \tag{9}$$

Als Beispiel betrachten wir nun Kugelkoordinaten. Hier gilt mit nach einfachen Rechnungen mit (4) und (6):

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} & h_r &= 1 \\
\vec{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} & h_\phi &= r\sin\theta \\
\vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} & h_\theta &= r
\end{aligned}$$

Sodass wir bekommen:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \cdot \partial_r + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\partial_\theta \tag{10}$$

2. Levi-Cevita-Symbol / ϵ-Tensor

Wir definieren den ϵ-Tensor als:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123 = 312 = 231 = \text{ gerade Permutation von } 123 \\ -1 & \text{für } ijk = 321 = 132 = 213 = \text{ gerade Permutation von } 123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{11}$$

Der Tensor ist antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier beliebiger Indizes:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj} \tag{12}$$

Mit dem ϵ-Tensor können wir das Kreuprodukt schreiben als:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{e}_i \cdot \epsilon_{ijk} a_j b_k \\ (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \end{aligned} \tag{13}$$

Zusätzlich geben wir noch eine wichtige Eigenschaft an:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{14}$$

3. <u>Nabla-Kalkül</u>

a. Es gilt (mit $r = |\vec{r}|$):

- $$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{15}$$

  Wir sehen also, dass gilt:

  $$\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \tag{16}$$

  Da wir im Folgenden die Indexschreibweise üben wollen, machen wir diese Aufgabe nochmal etwas anders:

  $$\vec{\nabla} r \overset{(1)}{=} \vec{e}_i \partial_i r \overset{(16)}{=} \vec{e}_i \frac{x_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{17}$$

  wobei wir genutzt haben, dass gilt:

  $$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_i \vec{e}_i \tag{18}$$

- $$\vec{\nabla}\vec{r} = \vec{e}_i \partial_i x_j \vec{e}_j = \vec{e}_i \delta_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i}_{=1} = \sum_{i=1}^{3} 1 = 3 \tag{19}$$

Hier haben wir am Ende die Summe doch noch mal explizit hingeschrieben, sodass wir sehen, dass wir noch 3 mal über die 1 summieren müssen. Des weiteren gilt natürlich:

$$\partial_i x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \tag{20}$$

da gilt.:

$$\partial_x x = \partial_y y = \partial_z z = 1$$
$$\partial_x y = \partial_x z = \partial_y x = \partial_y z = \partial_z x = \partial_z y = 0$$

- $$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{e}_i\partial_i\frac{1}{r} = \vec{e}_i\frac{\partial(\frac{1}{r(x,y,z)})}{\partial x_i} = \vec{e}_i\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \overset{(16)}{=} \vec{e}_i(-\frac{1}{r^2})\frac{x_i}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{21}$$

  wobei wir hier die Kettenregel verwendet haben, da $r = r(\vec{r}) = r(x, y, z)$ eine Funktion der Variablen ist, nach der abgeleitet wird.

- $$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = \vec{e}_i\partial_i\frac{1}{r^3} = \vec{e}_i\frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \overset{(16)}{=} \vec{e}_i(-3\frac{1}{r^4})\frac{x_i}{r} = -3\frac{\vec{r}}{r^5} \tag{22}$$

- $$\vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = 0 \tag{23}$$

  oder auch:

  $$\vec{\nabla}\times\vec{r} = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j x_k \overset{(20)}{=} \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\delta_{jk} = \vec{e}_i\epsilon_{ijj} \overset{(11)}{=} 0 \tag{24}$$

- $$\vec{\nabla}f(r) = \vec{e}_i\partial_i f(r) = \vec{e}_i\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \overset{(16)}{=} \vec{e}_i f'(r)\frac{x_i}{r} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{25}$$

- $$\vec{\nabla}\times\left[f(\vec{r})\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\hat{=}\vec{v}}\right] \overset{(43)}{=} (\vec{\nabla}f(\vec{r}))\times\frac{\vec{r}}{r} + f(\vec{r})[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}] \tag{26}$$

  $$= -\frac{\vec{r}}{r}\times[\vec{\nabla}f(\vec{r})] + f(\vec{r})[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}]. \tag{27}$$

  Wir berechnen nun:

  $$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j\frac{x_k}{r} = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\left[\frac{\partial_j x_k}{r} + x_k\partial_j\frac{1}{r}\right] = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\left[\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_k x_j}{r^2}\right]$$
  $$= \vec{e}_i\epsilon_{ijj}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\vec{e}_i \underbrace{\epsilon_{ijk}x_j x_k}_{\substack{\text{=antisym. unter} \\ \text{Vertauschung von } j \text{ und } k}} = 0 \tag{28}$$

Der erste Term verschwindet, weil $\epsilon_{ijj} = 0$, der zweite Term weil die Summe über (j,k) über einen asymmetrischen Term 0 ergibt. Dies wollen wir noch kurz allgemein beweisen. Wir betrachten die Doppelsumme:

$$\sum_{j,k} A_{jk}$$

mit einem antisym. Term:

$$A_{jk} = -A_{kj} \qquad \rightarrow \qquad A_{jj} = -A_{jj} = 0$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} A_{jk} &= \sum_{j<k} A_{jk} + \sum_{j=k} A_{jk} + \sum_{k<j} A_{jk} = \sum_{j<k} A_{jk} + \sum_{j} A_{jj} + \sum_{k<j} A_{jk} \\ &= \sum_{j<k} A_{jk} - \sum_{k<j} A_{kj}\end{aligned}$$

Im zweiten Term benennen wir nun die Indizes einfach um $j \rightarrow k, k \rightarrow j$ und bekommen:

$$\sum_{j,k} A_{jk} = \sum_{j<k} A_{jk} - \sum_{j<k} A_{jk} = 0 \tag{29}$$

Kommen wir zurück zu Gleichung (27). Mit Hilfe von (28) folgt nun einfach:

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r} \times [\vec{\nabla} f(\vec{r})] \tag{30}$$

b.

- $$\begin{aligned}\vec{\nabla}(e^{i\vec{k}\vec{r}}) &= \vec{e}_i \partial_i e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{e}_i \frac{\partial(e^{i\vec{k}\vec{r}})}{\partial(i\vec{k}\vec{r})} \frac{\partial(i\vec{k}\vec{r})}{\partial x_i} = \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\partial(ik_j x_j)}{\partial x_j} \stackrel{(20)}{=} \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} ik_j \delta_{ij} \\ &= \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} ik_i = i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}\end{aligned} \tag{31}$$

- $$\vec{\nabla}(\vec{d} e^{i\vec{k}\vec{r}}) \stackrel{(42)}{=} \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{d})}_{=0} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{d}(\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}) \stackrel{(31)}{=} \vec{d}(i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}) = i\vec{d}\,\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{32}$$

- $$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{d} e^{i\vec{k}\vec{r}}) &= \vec{\nabla} \times (e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{d}) \stackrel{(43)}{=} (\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}) \times \vec{d} + e^{i\vec{k}\vec{r}} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{d})}_{=0} \\ &\stackrel{(31)}{=} (i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}) \times \vec{d} = i(\vec{k} \times \vec{d}) e^{i\vec{k}\vec{r}}\end{aligned} \tag{33}$$

Effektiv sehen wir, dass immer nur $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ gesetzt werden muss. $\vec{\nabla}$ wirkt also ähnlich auf Funktionen $f(\vec{r})$ wie eine normale Ableitung ∂_x auf eine Funktion $f(x)$.

c.

- $$\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{w}) = \partial_i(\vec{v}\times\vec{w})_i = \partial_i\epsilon_{ijk}v_jw_k = \epsilon_{ijk}[w_k(\partial_i v_j)+v_j(\partial_i w_k)]$$
$$= w_k\epsilon_{kij}\partial_i v_j - v_j\epsilon_{jik}\partial_i w_k = w_k(\vec{\nabla}\times\vec{v})_k - v_j(\vec{\nabla}\times\vec{w})_j$$
$$= \vec{w}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\times\vec{w}) \quad (34)$$

- $$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{v}\times\vec{w})_k = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{kmn}v_mw_n$$
$$= \vec{e}_i \underbrace{\epsilon_{kij}\epsilon_{kmn}}_{\overset{(14)}{=}\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}} \partial_j(v_mw_n) = \vec{e}_i[\partial_j(v_iw_j)-\partial_j(v_jw_i)]$$
$$= \partial_j(\vec{v}w_j) - \partial_j(v_j\vec{w}) = \vec{v}\partial_j w_j + w_j\partial_j\vec{v} - \vec{w}\partial_j v_j - v_j\partial_j\vec{w}$$
$$= \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}) + (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{w}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} \quad (35)$$

  wobei wir am Ende die Klammern gesetzt haben um kenntlich zu machen, wo das Skalarprodukt ist.

- $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \partial_i(\vec{\nabla}\times\vec{v})_i = \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j v_k = \underbrace{\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j v_k}_{\text{antisym. unter } i\leftrightarrow j} \overset{(29)}{=} 0 \quad (36)$$

  Diese Relation wird sich als wichtig herausstellen, um eine der 4 Maxwell-Gleichungen herzuleiten. Da nämlich gilt $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ mit dem Vektorpotential $\vec{A}$, bekommen wir:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \overset{(36)}{=} 0 \quad (37)$$

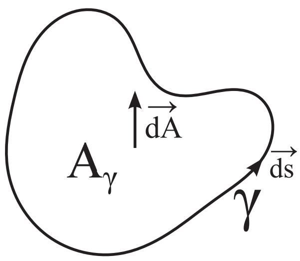
  Eine ähnliche Relation ist:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = 0 \quad (38)$$

  Welche zeigt, dass die Rotation von Potentialfeldern verschwindet. Ist ein Feld $\vec{F}$ also ein Potentialfeld, so lässt es sich ja durch $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ darstellen und es gilt dann:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad (39)$$

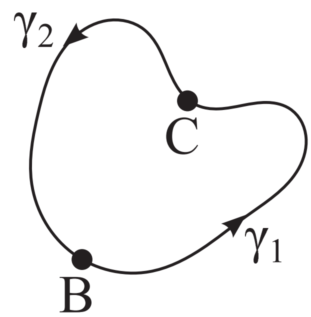
  Mit dem Integralsatz von Stokes können wir nun auch zeigen, dass die Arbeit eines solchen Feldes auf einem geschlossenen Weg 0 ist:



$$W_\circ = \oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = \oint_{A_\gamma}(\vec{\nabla}\times\vec{F})\vec{dA} = \oint_{A_\gamma}\underbrace{(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi))}_{=0}\vec{dA} = 0 \quad (40)$$

  womit auch gezeigt ist, dass die Arbeit für Potentialfelder wegunabhängig ist, da wir den Weg A_γ auch in 2 Wege aufteilen können:

$$
\begin{aligned}
0 = \oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \\
\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}
\end{aligned}
$$



Da γ_1 von B bis C geht und γ_2 von C bis B, ist es klar, dass der Weg $-\gamma_2$ (also richtungsumgekehrt) auch wieder von B bis C geht. Somit haben wir zwei unterschiedliche Wege von B bis C, welche dieselbe Arbeit geben. Da diese Wege beliebig sind, folgt die Wegunabhängigkeit der Arbeit bei Potentialfeldern.

- $$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{v})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m v_n = \vec{e}_i \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} \partial_j \partial_m v_n \\
&\overset{(14)}{=} \vec{e}_i (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) \partial_j \partial_m v_n = \vec{e}_i (\partial_j \partial_i v_j - \partial_j \partial_j v_i) \\
&= \vec{\nabla} \partial_j v_j - \partial_j \partial_j \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \qquad (41)
\end{aligned}
$$

d.

- $$
\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \partial_i (f\vec{v})_i = \partial_i (f v_i) = (\partial_i f) v_i + f(\partial_i v_i) = (\vec{\nabla} f)\vec{v} + f(\vec{\nabla}\vec{v}) \qquad (42)
$$

  wobei gilt, dass wenn eine Klammer um einen Ausdruck mit Ableitung steht, diese Ableitung nicht mehr auf das wirkt, was hinter der Klammer steht, sondern nur auf die Ausdrücke in der Klammer:

  $$
  (\vec{\nabla} f)\vec{v} \equiv \vec{v}\vec{\nabla} f, \quad (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} \equiv -\vec{v} \times \vec{\nabla} f
  $$

- $$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f\vec{v})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f v_k) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} [(\partial_j f) v_k + f(\partial_j v_k)] \\
&= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j f) v_k + f \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j v_k) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\
&= -\vec{v} \times \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

e.

- $$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i \partial_i \vec{P}(f(\vec{r})) = \vec{e}_i \frac{\partial \vec{P}(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} = \vec{e}_i \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \partial_i f(\vec{r}) \\
&= \dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))(\vec{\nabla} f(\vec{r})) \qquad (44)
\end{aligned}
$$

  wobei:

  $$
  \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) = \frac{\partial \vec{P}(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \qquad (45)
  $$

- $$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j P_k(f(\vec{r})) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial P_k(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_j} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \dot{P}_k(f(\vec{r})) \partial_j f(\vec{r}) \\
&= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} f(\vec{r}))_j \dot{P}_k(f(\vec{r})) = (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \times \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \\
&= -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \times (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \qquad (46)
\end{aligned}
$$