

## Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman  
Dr. B. NarozhnyBlatt 10:Lösungen  
Besprechung 24.01.2014

## 1. Erwartungswert, Variation und Unschärfe-Relation: (15 = 5 + 5 + 5 Punkte)

Gegeben sei die Wellenfunktion eines Teilchens in 1-D:

$$\psi(x) = \mathcal{N} (a + bx + cx^2) \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right],$$

wobei  $a, b$  und  $c$  reell sind.

a) **Bestimmen Sie den Normierungskoeffizient  $\mathcal{N}$ .**

Der Normierungskoeffizient wird mithilfe der Normierungs-Bedingung bestimmt:

$$\int dx |\psi(x)|^2 = 1.$$

$$1 = \mathcal{N}^2 \int dx (a + bx + cx^2)^2 \exp[-x^2].$$

Aus Symmetrie-Gründen "überleben" im diesem Integral nur die gerade Potenzen von  $x$ :

$$1 = \mathcal{N}^2 \int dx (a^2 + b^2 x^2 + 2acx^2 + c^2 x^4) \exp[-x^2].$$

Wir brauchen, also, die folgenden Integrale:

$$\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

$$\int x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2}.$$

$$\int x^4 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-5/2}.$$

Der Parameter  $\alpha$  war hier nötig um nach  $\alpha$  differenzieren zu können. Am Ende setzen  $\alpha = 1$  und erhalten

$$1 = \mathcal{N}^2 \left( a^2 \sqrt{\pi} + (b^2 + 2ac) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c^2 \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right).$$

Also

$$\mathcal{N}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \left( a^2 + \frac{b^2 + 2ac}{2} + \frac{3c^2}{4} \right)}.$$

- b) **Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle$  und  $\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ . Hier ist  $\hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x$  der Impulsoperator.**

$$\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \int dx x (a + bx + cx^2)^2 \exp[-x^2] .$$

Jetzt, aus Symmetrie-Gründen "überleben" nur die folgenden Terme

$$\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \int dx (2abx^2 + 2bcx^4) \exp[-x^2] .$$

Das ergibt

$$\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \left( ab\sqrt{\pi} + \frac{3bc\sqrt{\pi}}{2} \right) .$$

Letztendlich

$$\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \frac{(ab + \frac{3bc}{2})}{(a^2 + \frac{b^2+2ac}{2} + \frac{3c^2}{4})} .$$

Für den Erwartungswert des Impuls-Operators erhalten wir ( $\psi(x)$  ist reell)

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int dx \psi(x) (-i\hbar \partial / \partial x) \psi(x) .$$

Ohne Rechnung sieht man, dass  $\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = 0$ . Z.B., mithilfe der partiellen Integration man kann zeigen, dass  $\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = -\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ .

- c) **Berechnen Sie die Variationen  $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$  und  $(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$  und überzeugen Sie sich, dass die Unschärfe-Relation  $(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar/2$  gilt.**

1) Wir berechnen erst  $(\Delta x)^2$ :

$$\langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \int dx x^2 (a + bx + cx^2)^2 \exp[-x^2] .$$

$$\langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \int dx (a^2 x^2 + b^2 x^4 + 2acx^4 + c^2 x^6) \exp[-x^2] .$$

Wir brauchen noch das folgende Integral:

$$\int x^6 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-5/2} \right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \alpha^{-7/2} .$$

Dann erhalten wir

$$\langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left( \frac{a^2}{2} + \frac{3b^2 + 6ac}{4} + \frac{15c^2}{8} \right) .$$

$$\langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle = \frac{\left( \frac{a^2}{2} + \frac{3b^2+6ac}{4} + \frac{15c^2}{8} \right)}{\left( a^2 + \frac{b^2+2ac}{2} + \frac{3c^2}{4} \right)} .$$

Schließlich

$$(\Delta x)^2 = \frac{\left( \frac{a^2}{2} + \frac{3b^2+6ac}{4} + \frac{15c^2}{8} \right)}{\left( a^2 + \frac{b^2+2ac}{2} + \frac{3c^2}{4} \right)} - \frac{\left( ab + \frac{3bc}{2} \right)^2}{\left( a^2 + \frac{b^2+2ac}{2} + \frac{3c^2}{4} \right)^2} .$$

2) Um  $\langle \hat{p}^2 \rangle$  bestimmen zu können, berechnen wir erst

$$\phi(x) = \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}(a + bx + cx^2) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

$$\phi(x) = \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \mathcal{N} [(b + 2cx) - x(a + bx + cx^2)] \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

$$\phi(x) = \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \mathcal{N} [b + (2c - a)x - bx^2 - cx^3] \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

Dann

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \phi | \phi \rangle = \int dx \phi^*(x) \phi(x).$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \int dx [b^2 + (2c - a)^2 x^2 + b^2 x^4 + c^2 x^6 - 2b^2 x^2 - 2c(2c - a)x^4] \exp[-x^2]$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \int dx [b^2 + [(2c - a)^2 - 2b^2] x^2 + [b^2 - 2c(2c - a)] x^4 + c^2 x^6] \exp[-x^2].$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left[ b^2 + \frac{1}{2} [(2c - a)^2 - 2b^2] + \frac{3}{4} [b^2 - 2c(2c - a)] + \frac{15}{8} c^2 \right].$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left[ \frac{3}{4} b^2 + \frac{1}{2} (2c - a)^2 - \frac{3}{2} c(2c - a) + \frac{15}{8} c^2 \right].$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} b^2 - \frac{1}{2} (2c - a)(a + c) + \frac{15}{8} c^2 \right).$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} b^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} ac + \frac{7}{8} c^2 \right).$$

Schließlich

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \mathcal{N}^2 \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} b^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} ac + \frac{7}{8} c^2 \right).$$

$$(\Delta p)^2 = \hbar^2 \frac{\left( \frac{3}{4} b^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} ac + \frac{7}{8} c^2 \right)}{\left( a^2 + \frac{b^2 + 2ac}{2} + \frac{3c^2}{4} \right)}.$$

## 2. Spin-1/2 (Quantenbit):

(15 = 5 + 5 + 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unschärferelationen eng verknüpft sind mit den Kommutatoren von Operatoren. Im allgemeinen gilt

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

wobei  $[\hat{A}, \hat{B}]$  ein Kommutator ist:  $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

Bei Spin 1/2 werden die so genannten *Pauli-Matrizen*  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) benutzt

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Spinoperator ist dabei definiert als  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ .

- a) Überprüfen Sie mit einer expliziten Rechnung dass die Pauli-Matrizen den folgenden Relationen genügen

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i \sigma_z & [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i \sigma_x & [\sigma_x, \sigma_z] &= -2i \sigma_y \\ \sigma_x^2 &= 1 & \sigma_y^2 &= 1 & \sigma_z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Einfache Matrix-Multiplikation.

- b) Der Zustand des Spin-1/2 (Quantenbits) ist gegeben durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle .$$

Hier  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind die Eigenzustände des Operators  $\sigma_z$ :  $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$  und  $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ . Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\langle \hat{S}_i \rangle$  und die Variationen  $(\Delta S_i)^2$  für  $i = x, y, z$  für den Zustand  $|\psi\rangle$ .

$$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{i}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{\hbar}{4} .$$

$$\langle \psi | S_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{i}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0 .$$

$$\langle \psi | S_y | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{i}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\hbar\sqrt{3}}{4} .$$

$$\langle \psi | S_z^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \sigma_z^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} .$$

$$\langle \psi | S_x^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \sigma_x^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} .$$

$$\langle \psi | S_y^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \sigma_y^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{4} .$$

$$(\Delta S_z)^2 = \langle \psi | S_z^2 | \psi \rangle - \langle \psi | S_z | \psi \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{16} = \frac{3\hbar^2}{16} .$$

$$(\Delta S_x)^2 = \langle \psi | S_x^2 | \psi \rangle - \langle \psi | S_x | \psi \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} - 0 = \frac{\hbar^2}{4} .$$

$$(\Delta S_y)^2 = \langle \psi | S_y^2 | \psi \rangle - \langle \psi | S_y | \psi \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{3\hbar^2}{16} = \frac{\hbar^2}{16} .$$

c) **Überprüfen Sie, für den Zustand  $|\psi\rangle$ , die Unschärferelationen**

1) Die erste Ungleichung

$$(\Delta S_x)^2(\Delta S_y)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_x, \hat{S}_y] \rangle \right)^2$$

Wir erhalten für den Kommutator  $[S_x, S_y] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_x, \sigma_y] = \frac{\hbar^2}{4}2i\sigma_z = i\hbar S_z$ .

Dann gilt

$$\langle [\hat{S}_x, \hat{S}_y] \rangle = i\hbar \langle S_z \rangle = -i\frac{\hbar^2}{4}.$$

Wir überprüfen die Ungleichung

$$\frac{\hbar^2}{4} \times \frac{\hbar^2}{16} \geq \frac{\hbar^4}{64}. \quad OK$$

2) Die zweite Ungleichung

$$(\Delta S_x)^2(\Delta S_z)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_x, \hat{S}_z] \rangle \right)^2$$

Wir erhalten für den Kommutator  $[S_x, S_z] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_x, \sigma_z] = -\frac{\hbar^2}{4}2i\sigma_y = -i\hbar S_y$ .

Dann gilt

$$\langle [\hat{S}_x, \hat{S}_z] \rangle = -i\hbar \langle S_y \rangle = i\frac{\hbar^2\sqrt{3}}{4}$$

Wir überprüfen die Ungleichung

$$\frac{\hbar^2}{4} \times \frac{3\hbar^2}{16} \geq \frac{3\hbar^4}{64}. \quad OK$$

3) Die dritte Ungleichung

$$(\Delta S_y)^2(\Delta S_z)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \rangle \right)^2.$$

Wir erhalten für den Kommutator  $[S_y, S_z] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_y, \sigma_z] = \frac{\hbar^2}{4}2i\sigma_x = i\hbar S_x$ .

Dann gilt

$$\langle [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \rangle = i\hbar \langle S_x \rangle = 0$$

Wir überprüfen die Ungleichung

$$\frac{\hbar^2}{16} \times \frac{3\hbar^2}{16} \geq 0. \quad OK$$