Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 11 :Lösungen
Besprechung 31.01.2014

---

1. Streuung an dem Potentialtopf:

Die asymptotische Form der Wellenfunktion:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A(E)e^{-ikx} & x \to -\infty \\ B(E)e^{ikx} & x \to \infty \end{cases}$$

Der Reflexionskoeffizent

$$R(E) = |A(E)|^2.$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung finden wir in der Form:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x < -a/2 \\ B_1 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} & -a/2 < x < a/2 \\ Ce^{ikx} & x > a/2 \end{cases}$$

wobei

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}, \qquad q = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+V)}.$$

Die Koeffizienten finden wir von den Randbedingungen:

$$\psi\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right), \qquad \psi'\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi'\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right).$$

Am $x = -a/2$ finden wir

$$e^{-ika/2} + Ae^{ika/2} = B_1 e^{-iqa/2} + B_2 e^{iqa/2}, \tag{1}$$

und

$$ik\left(e^{-ika/2} - Ae^{ika/2}\right) = iq\left(B_1 e^{-iqa/2} - B_2 e^{iqa/2}\right). \tag{2}$$

Am $x = a/2$ finden wir

$$Ce^{ika/2} = B_1 e^{iqa/2} + B_2 e^{-iqa/2}, \tag{3}$$

und

$$ikAe^{ika/2} = iq\left(B_1 e^{iqa/2} - B_2 e^{-iqa/2}\right). \tag{4}$$

Wir haben vier linearen Gleichungen und vier Unbekannten. Wir brauchen den Koeffizient A. Die Lösung ist

$$A = e^{-ika}\frac{i\left(q^2 - k^2\right)\sin qa}{4kq\cos qa - i\left(q^2 + k^2\right)\sin qa}.$$

Letztendlich finden wir den Reflexionskoeffizent

$$R(E) = \frac{\left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}{4k^2 q^2 + \left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa} = \frac{V^2 \sin^2 qa}{4E(E+V) + V^2 \sin^2 qa}.$$

2. Harmonischer Oszillator:

(a) “Wellenfunktionen der angeregten Zustände”

Der erste angeregte Zustand:

$$|1\rangle = N \hat{a}^\dagger |0\rangle,$$

wobei N die Normierungskonstante ist.
Explizit:

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[m\omega x - \hbar \frac{d}{dx}\right] e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} 2m\omega x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

In diesem Fall $N = 1$ und

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Der zweite angeregte Zustand:

$$|2\rangle = N \hat{a}^\dagger |1\rangle.$$

Explizit:

$$\hat{a}^\dagger |1\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[m\omega x - \hbar \frac{d}{dx}\right] x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\hbar} \left(2m\omega x^2 - \hbar\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Hier $N = 1/\sqrt{2}$ und

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} \left(2m\omega x^2 - \hbar\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

(b) “die zeitabhängige Koordinate”

Der Koordinate-Operator
$$\hat{x} \propto \hat{a}^\dagger + \hat{a}.$$
Der Mittelwert der Koordinate in einem Eigenzustand
$$\langle n|\hat{x}|n\rangle \propto \langle n|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0$$
Deswegen, in beiden Falle
$$\langle 1|x(t)|1\rangle = \langle 2|x(t)|2\rangle = 0.$$
Natürlich kann man dieses Ergebnis explizit mit der Hilfe der Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ finden.

(c) “die Linearkombinationen der Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$”

Betrachten wir den Zustand
$$|1\rangle + |2\rangle.$$
Wenn wir die Begriffe $|1\rangle$ und $|2\rangle$ statt zeitunabhängigen Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ benutzen, dann können wir die folgende zeitabhängige Wellenfunktion finden
$$\psi(x,t) = N\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right).$$
Die Normierungskonstante ist $N = 1/\sqrt{2}$.
Der Mittelwert der Koordinate ist denn
$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= N^2\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| + e^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\left[e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| + e^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{2}\left[e^{-iE_1t/\hbar}|2\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|1\rangle\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}.
\end{aligned}$$
In der zweiten Zustand
$$|1\rangle + i|2\rangle$$
gehen wir ähnlich vor:
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right).$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| - ie^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\left[e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| - ie^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{2}\left[e^{-iE_1t/\hbar}|2\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|1\rangle\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sin\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}.
\end{aligned}$$