Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 13: Lösungen
Besprechung 14.02.2014

1. Atom im Magnetfeld:

Nehmen wir an, dass das Magnetfeld sich entlang die z-Achse richtet. Im schwachen Magnetfeld finden wir die folgende Energien:

$$E = E_0 + \mu_B m B,$$

wobei E_0 die Energie in Abwesenheit des Magnetfelds ist. Hier $m = \langle L_z \rangle$.

Deswegen:

$$E_{210} = E_0, \qquad E_{211} = E_0 + \mu_B B, \qquad E_{21-1} = E_0 - \mu_B B.$$

Diese Zustände sind Eigenzustände des Operators $\hat{L}_z$ und zwar

$$\langle 2,1,0|\hat{L}_z|2,1,0\rangle = 0, \quad \langle 2,1,1|\hat{L}_z|2,1,1\rangle = 1, \quad \langle 2,1,-1|\hat{L}_z|2,1,-1\rangle = -1.$$

In aller diesen Zustände

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0.$$

Im letzten Zustand finden wir

$$|a\rangle(t=0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|2,1,0\rangle - 2|2,1,1\rangle + |2,1,-1\rangle \right)$$

$$\Rightarrow \quad |a\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|2,1,0\rangle e^{-iE_{210}t/\hbar} - 2|2,1,1\rangle e^{-iE_{211}t/\hbar} + |2,1,-1\rangle e^{-iE_{21-1}t/\hbar} \right)$$

Jetzt finden wir den Mittelwert

$$\langle L_z \rangle = -\frac{1}{2},$$

weil jede Linearkombination der Eigenzustände ist auch ein Eigenzustand.

Interessanter sind die andere Komponenten $\langle L_x \rangle$ und $\langle L_y \rangle$. Benutzen wir die Relationen

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ + \hat{L}_- \right), \qquad \hat{L}_y = \frac{1}{2i} \left(\hat{L}_+ - \hat{L}_- \right).$$

Dann

$$2\langle L_x \rangle = \langle L_+ \rangle + \langle L_- \rangle,$$

wobei

$$\langle L_+ \rangle = -\frac{2}{6} e^{i(E_{211}-E_{210})t/\hbar} \langle 2,1,1|\hat{L}_+|2,1,0\rangle + \frac{1}{6} e^{i(E_{210}-E_{21-1})t/\hbar} \langle 2,1,0|\hat{L}_+|2,1,-1\rangle$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} e^{i\mu_B B t/\hbar}.$$

$$\langle L_- \rangle = -\frac{2}{6} e^{-i(E_{211}-E_{210})t/\hbar} \langle 2,1,0|\hat{L}_-|2,1,1\rangle + \frac{1}{6} e^{-i(E_{210}-E_{21-1})t/\hbar} \langle 2,1,-1|\hat{L}_+|2,1,0\rangle$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} e^{-i\mu_B Bt/\hbar}.$$

Letztendlich

$$\langle L_x \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{6} \cos(\mu_B Bt/\hbar), \qquad \langle L_y \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{6} \sin(\mu_B Bt/\hbar).$$

2. Helium-Ion:

Die Energieniveaus eines Atoms wurden in der Vorlesung bekannt gegeben

$$E = -\frac{mMZ^2e^4}{2\hbar^2 (M+m) n^2}.$$

Für Helium-3

$$Z = 2, \quad M = 3m_p, \quad m = m_e,$$

wobei $m_{p(e)}$ die Masse eines Protons (Elektrons) ist. Deswegen

$$E_1 = -6 \frac{m_e m_p e^4}{\hbar^2 (3m_p + m_e)}.$$

Für Helium-4

$$Z = 2, \quad M = 4m_p, \quad m = m_e,$$

wobei $m_{p(e)}$ die Masse eines Protons (Elektrons) ist. Deswegen

$$E_1 = -8 \frac{m_e m_p e^4}{\hbar^2 (4m_p + m_e)}.$$