Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014**

**Prof. Dr. A. Shnirman**
**Dr. B. Narozhny**

**Blatt 2:Lösungen**
**Besprechung 08.11.2013**

---

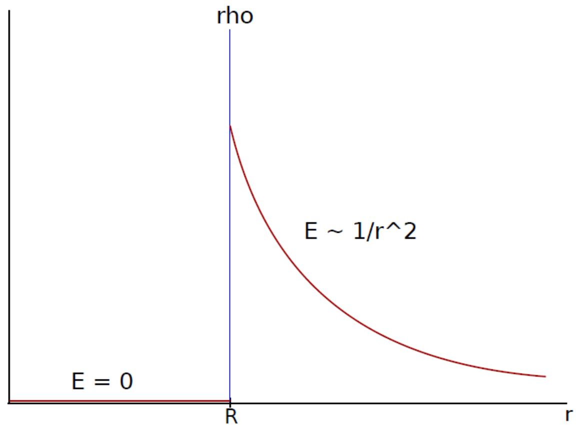
## 1. Gauß'scher Satz:

Erst geben wir die allgemeine Formel des Elektrischen Feldes in Abhängigkeit von der Ladungsverteilung an, bevor wir für die konkreten Ladungsverteilungen die Felder berechnen.
Maxwell (Kugelsymmetrie → Größen hängen nur vom Betrag des Ortes ab):

$$\vec{\nabla}\left(\epsilon_0 \vec{E}\left(r\right)\right) = \rho\left(r\right)$$
$$\int_V d^3r' \vec{\nabla}\vec{E}\left(r'\right) = \int_V d^3r' \frac{\rho\left(r'\right)}{\epsilon_0}.$$

Wir wenden den Satz von Gauß auf der linken Seite der Gleichung an. Wegen der Rotationssymmetrie ist das elektrische Feld radial und somit parallel zum Normalenvektor der Kugeloberfläche ausgerichtet. Es kann also mit den Beträgen gerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int_V dA\ E\left(r'\right) &= \int_V d^3r' \frac{\rho\left(r'\right)}{\epsilon_0} \\
4\pi r^2 E\left(r\right) &= \int_V d^3r' \frac{\rho\left(r'\right)}{\epsilon_0} \\
E\left(r\right) &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_V d^3r' \frac{\rho\left(r'\right)}{\epsilon_0} \\
E\left(r\right) &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r dr' \int_0^{2\pi} r' d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r' d\cos\left(\theta\right) \frac{\rho\left(r'\right)}{\epsilon_0} \\
E\left(r\right) &= \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^r dr' r'^2 \rho\left(r'\right).
\end{aligned}$$




(a) leitende Kugel $\rightarrow$ Ladungen sitzen gleichmäßig verteilt auf der Oberfläche

$$\begin{aligned}
\rightarrow \rho\left(r\right) &= \frac{Q}{4\pi R^2}\delta\left(r-R\right) \\
E\left(r\right) &= \frac{Q}{4\pi R^2\epsilon_0 r^2}\int_0^r dr' r'^2 \delta\left(r'-R\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$E\left(r\right) = \frac{Q}{4\pi R^2\epsilon_0 r^2}\begin{cases} R^2 & \text{falls} \quad R\in(0,r) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q}{4\pi R^2\epsilon_0 r^2}R^2\Theta\left(r-R\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta\left(r-R\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

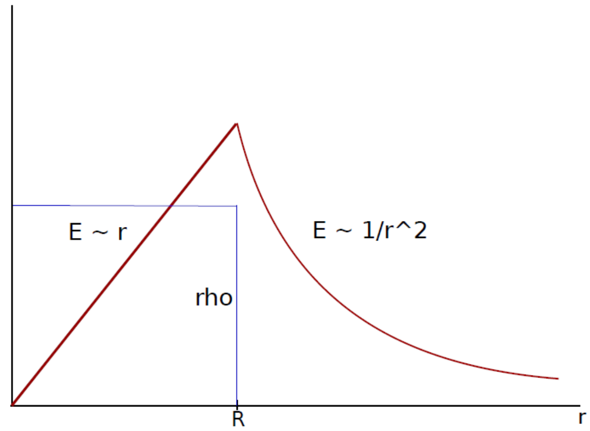
wobei

$$\Theta(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x\geq x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x), \tag{4}$$

die Heaviside-Funktion ist.

(b) gleichmässig verteilte Ladung

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \rho\left(r\right) &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Theta\left(R-r\right)\\
E\left(r\right) &= \frac{3\;Q}{4\pi R^3\epsilon_0 r^2}\int_0^r dr' r'^2\Theta\left(R-r'\right)\\
&= \frac{3Q}{4\pi R^3\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{3}R^3\Theta\left(r-R\right)+\frac{1}{3}r^3\Theta\left(R-r\right)\right)\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta\left(r-R\right)+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\;r\;\Theta\left(R-r\right). \qquad (5)
\end{aligned}
$$



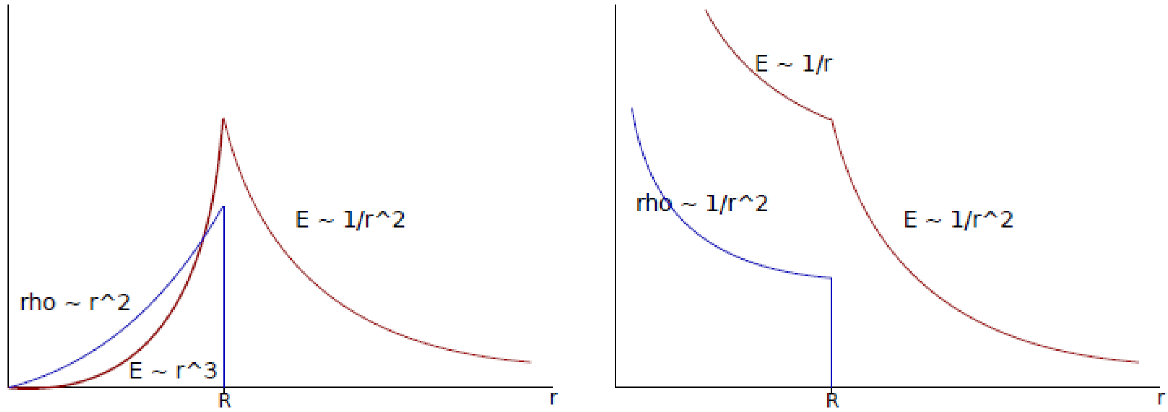

(c) Ladungsdichte, die mit $r^n$ variiert ($n > -3$, Skizze für $n = \pm 2$):

Wie in den vorherigen Aufgaben auch, muss die Ladungsdichte so normiert werden, dass das Integral über die Gesamtladung $Q$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
\rho\left(r\right) &= \frac{Q}{N}r^n\Theta\left(R-r\right),\\
Q &= \int_0^R dr 4\pi r^2\rho\left(r\right)\\
&= \frac{Q}{N}\int_0^R dr 4\pi r^{n+2}\\
\rightarrow N &= \int_0^R dr 4\pi r^{n+2}\\
&= \frac{4\pi R^{n+3}}{n+3}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Damit können wir das Elektrische Feld berechnen:

$$
\begin{aligned}
\rho\left(r\right) &= \frac{Q\left(n+3\right)}{4\pi R^{n+3}} r^n \Theta\left(R-r\right) \\
E\left(r\right) &= \frac{Q\left(n+3\right)}{4\pi R^{n+3}\epsilon_0 r^2}\int_0^r dr' r'^2 r'^n \Theta\left(R-r'\right) \\
&= \frac{Q\left(n+3\right)}{4\pi R^{n+3}\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{n+3}R^{n+3}\Theta\left(r-R\right)+\frac{1}{n+3}r^{n+3}\Theta\left(R-r\right)\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta\left(r-R\right)+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^{n+3}}\ r^{n+1}\ \Theta\left(R-r\right). \qquad (7)
\end{aligned}
$$



**2. Leitende Fläche:**

Die Fläche ist leitend, daher darf keine elektrische Feldkomponente in den Platten vorhanden sein. Das Potential ist konstant und wir wählen insbesondere $\Phi = 0$.

Wir legen die Punktladung in die $xy$-Ebene und bezeichnen ihre Position mit $\mathbf{r}_0 = (0, a)^T$.

(a) Die Spiegelladung mit Ladung $-q$ liegt dann bei $\mathbf{r}_1 = (0, -a)^T$.

(b) Das Gesamtpotential ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{1} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2}} \right]\end{aligned} \tag{8}$$

Auf der Fläche

$$\phi(y = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + z^2}} \right] = 0.$$

Das elektrische Feld auf der Fläche ist senkrecht

$$\mathbf{E}(x, 0, z) = -\mathbf{e}_y \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0},$$

$$\mathbf{E}(x, 0, z) = -\mathbf{e}_y \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \left( x^2 + a^2 + z^2 \right)^{-3/2}.$$

(c) Die Oberflächnladungsdichte ergibt sich wieder aus dem Sprung des elektrischen Feldes (siehe Aufgabe 1d)

$$\sigma(x, 0, z) = -\frac{aq}{2\pi} \left( x^2 + a^2 + z^2 \right)^{-3/2}.$$

(d) Die gesamte Oberflächenladung in der xz-Ebene is gegeben durch

$$Q = \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{\infty}^{\infty} dz\, \sigma(x, 0, z) = -\frac{aq}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\left(x^2 + a^2 + z^2\right)^{3/2}} = -q.$$

## 3. Leitende Kugel:

(a) Da die leitende Kugel geerdet ist, gilt für das Potential im Innenraum $K_R$, $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Wir berechnen nun das Potential im Außenraum $\bar{K}_R^C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{r}| > R\}$ mit der Methode der Spiegelladung.
Wir fügen eine fiktive Spiegelladung $q'$ im Innenraum der Kugel hinzu, deren Potential im Außenraum die Laplace-Gleichung erfüllt, also eine homogene Lösung darstellt. Diese Lösung wird so gewählt, dass das Gesamtpotential das Randwertproblem löst. Die Spiegelladung beschreibt dabei das Potential der auf dem Rand des Gebietes $\bar{K}_R^C$ induzierten Oberflächenladung.

Da das Problem symmetrisch bezüglich Rotationen um die z-Achse ist kann die Spiegelladung ebenfalls nur auf der z-Achse liegen. Wir bezeichnen die Position der Spiegelladung mit $\mathbf{a}' = a'\mathbf{e}_z$, wobei $|a'| < R$ gilt und $\mathbf{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung bezeichnet. Das Potential im Außenraum ist nun gegeben durch die Überlagerung beider Potentiale,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - a'\mathbf{e}_z|}\right) . \tag{9}$$

Die Konstanten $a'$ und $q'$ sind aus der Randbedingung $\phi(|\mathbf{r}| = R) = 0$ zu berechnen. Dazu betrachten wir die zwei Punkte $\mathbf{r} = \pm R\mathbf{e}_z$ in Gl. (9). Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\frac{q}{a - R} = \frac{-q'}{R - a'} , \tag{10}$$

$$\frac{q}{a + R} = \frac{-q'}{a' + R} . \tag{11}$$

Man erkennt unmittelbar, dass $\mathrm{sign}(q) = -\mathrm{sign}(q')$ gilt. Teilt man nun Gl. (10) und (11) durcheinander so erhält man

$$a' = \frac{R^2}{a} < R . \tag{12}$$

Einsetzen in Gl (10) gibt die Spiegelladung

$$q' = -q\,\frac{R}{a} . \tag{13}$$

Wir setzen die Konstanten aus Gl. (12) und (13) in das Potential (9) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} - \frac{R/a}{\left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{a}\mathbf{e}_z\right|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a}\cos(\theta)}}\right) \\
&= \frac{\bar{q}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{R}^2 + \frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2} - 2\bar{r}\cos(\theta)}}\right) .
\end{aligned} \tag{14}$$

Hierbei haben wir das Potential in Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta)$ geschrieben, wobei wir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = r\cos(\theta)$ benutzen. In der letzten Zeile haben wir die dimensionslosen Variablen $\bar{r} = r/a$, $\bar{R} = R/a$ eingeführt und schreiben $\bar{q} = q/4\pi\epsilon_0$.

(b) Das elektrische Feld ist gegeben durch $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$, wobei wir den $\nabla$-Operator in Kugelkoordinaten verwenden

$$\nabla = \mathbf{e}_r\,\partial_r + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{r}\,\partial_\theta + \mathbf{e}_\phi\,\frac{1}{r\sin(\theta)}\,\partial_\phi\,. \tag{15}$$

Wir wollen das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche, also für $r \searrow R$ berechnen. Das Potential (14) hängt nicht vom Azimutalwinkel $\varphi$ ab, daher verschiwndet die Komponente des elektrisches Feldes in Richtung $\mathbf{e}_\phi$.
Die Ableitung des Potentials nach dem Polarwinkel $\theta$ verschwindet ebenfalls auf der Kugeloberfläche,

$$-\partial_\theta\phi(\mathbf{r})|_{\bar{r}\propto\bar{R}} = \left[\frac{\bar{r}\sin(\theta)}{(1+\bar{r}^2-2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}} - \frac{\bar{r}\sin(\theta)}{(\bar{R}^2+\bar{r}^2/\bar{R}^2-2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}}\right]_{\bar{r}=\bar{R}} = 0\,. \tag{16}$$

Damit ist das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche parallel zu $\mathbf{e}_r$ und gegeben durch

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}})|_{r=R} = -\mathbf{e}_r\,\frac{1}{a}\,\frac{\partial\phi}{\partial\bar{r}}\bigg|_{r=R} = -\mathbf{e}_r\,\frac{\bar{q}}{a}\,\frac{1-\bar{R}^2}{\bar{R}[1+\bar{R}^2-2\bar{R}\cos(\theta)]^{3/2}}\,. \tag{17}$$

Oder ausgedrueckt durch, $R$, $a$, $q$ und $r$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r=R} = \mathbf{e}_r\,\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a^2-R^2}{R[a^2+R^2-2aR\cos(\theta)]^{3/2}}\,. \tag{18}$$

(c) Aus dem Potential (14) ergibt sich die Kraft, welche auf die Punktladung q wirkt. Dabei muss die unendliche Selbstwechselwirkung (der erste Term in Gl. (14)) ignoriert werden. Die Ladung q erfährt daher nur die Kraft hervorgerufen durch die Oberflächenladung, welche äquivalent zur Bildladung ist,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{Bildl.}}(a\mathbf{e}_z) = -q\mathbf{e}_r\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\frac{-\bar{q}}{\sqrt{\bar{R}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2}-2\bar{r}\cos(\theta)}}\Bigg|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{aR}{(a^2-R^2)^2}. \tag{19}$$

Die Ableitung $\partial_\theta\phi$ verschwindet im Punkt $r = a$, $\theta = 0$.

(d) Nach dem Gaußschen Gesetz ist die Oberflächenladung $\sigma$ auf der Kugeloberfläche gegeben durch die Unstetigkeit des elektrischen Feldes an der Grenzschicht mit Normalen $\pm\mathbf{e}_r$,

$$\sigma = \epsilon_0\,\mathbf{e}_r\cdot[\mathbf{E}(r\searrow R) - \mathbf{E}(r\nearrow R)]\,. \tag{20}$$

Da das elektrische Feld im Innenraum verschwindet erhalten wir mit der Gl. (18)

$$\sigma_{\text{Oberfl.}} = \frac{-q}{4\pi}\,\frac{a^2-R^2}{R[a^2+R^2-2aR\cos(\theta)]^{3/2}}\,. \tag{21}$$

Und für die gesamte Oberflächenladung erhalten wir durch Integration von Gl. (21),

$$\begin{aligned} Q_{\text{Oberfl.}} &= -\frac{q}{4\pi} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos(\theta) \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, R^2 \, \frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}} \\ &= -\frac{q}{2} \, \frac{(a^2 - R^2)}{2a} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \, \frac{1}{[a^2 + R^2 - z]^{3/2}} = -q \, \frac{R}{a} \, . \end{aligned} \tag{22}$$

Wie erwartet ist die gesamte Oberflächenladung gleich der Spiegelladung aus Gl. (13).