Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

**Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014**

**Prof. Dr. A. Shnirman**
**Dr. B. Narozhny**

**Blatt 3: Lösungen**
**Besprechung 15.11.2013**

---

## 1. Kapazität:

(a) "Die Kapazität pro Längeneinheit eines langen Zylinderkondensators soll berechnet werden [...]"

Wir wählen hier Zylinderkoordinaten.

1. "Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma$ auf der Kernelektrode."

   Die Flächenladungsdichte ist

   $$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q}{2\pi a l} \text{ ( "Kernelektrode" )} \\ \sigma_b &= -\frac{Q}{2\pi b l} \end{aligned} \tag{1}$$

   und folglich die Raumladungsdichte

   $$\rho\left(\vec{x}\right) = \sum_{R=a,b} \sigma_R \delta\left(\rho - R\right).$$

2. "Berechnen Sie $\vec{E}(r)$ in den Bereichen $r < a$, $a < r < b$ und $b < r$."

   Anwenden des Gauss'schen Satzes (Integrationsvolumen ein Zylinder des Radiuses $r$) liefert

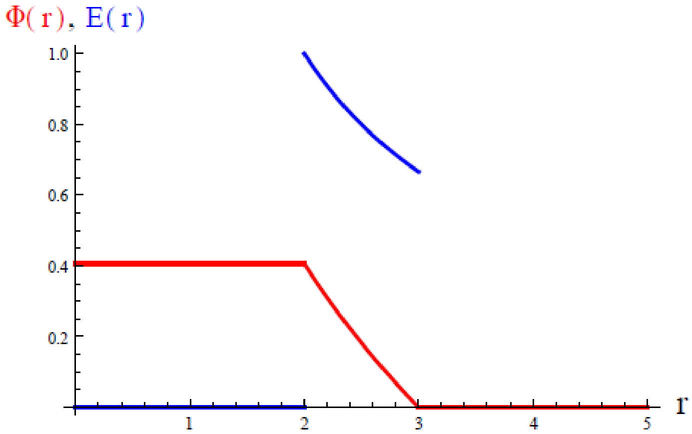
   $$E_r\left(r\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{rl}\,\theta\left(r-a\right)\theta\left(b-r\right). \tag{2}$$

3. "Leiten Sie aus dem elektrischen Feld $\vec{E}$ das Potential $\Phi$ her. Setzen Sie dabei $\Phi(\infty) = 0$. Skizzieren Sie $E(r)$ und $\Phi(r)$."

   Im Innenbereich gilt

   $$\Phi\left(r\right) = -\int_a^r dr' E_r\left(r'\right) = -\frac{2Q}{l}\ln\frac{r}{a} + \Phi_0.$$

   Das Verhalten bei $r \to \infty$ bestimmt die Integrationskonstante und folglich (mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung für $\Phi$)




$$\Phi\left(r\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2Q}{l}\ln\frac{r}{b}\theta\left(r-a\right)\theta\left(b-r\right)-\frac{2Q}{l}\ln\frac{a}{b}\theta\left(a-r\right)\right]. \tag{3}$$

Die logarithmische Abhängigkeit ist typisch für ein effektiv zweidimensionales Problem.

4. "Bestimmen Sie die Energie $W$ pro Längenelement in dem Kondensator durch das Volumenintegral einmal über $\vec{E}^{\,2}(\vec{r})$ und einmal über $\rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$."

$$W=\frac{1}{8\pi}\int d^3x|\vec{E}|^2=\frac{l}{4}\int_a^b dr\; r\left(\frac{2Q}{rl}\right)^2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{l}\ln\frac{b}{a}. \tag{4}$$

Alternativ

$$W=\frac{1}{2}\int d^3x\rho(\vec{x})\Phi\left(\vec{x}\right)=\pi l\frac{2Q}{l}\sigma_b\ln b/a=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{l}\ln b/a. \tag{5}$$

5. "Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Längeneinheit an."

$$U=\Phi(a)-\Phi(b)=\frac{2Q}{l}\ln b/a \tag{6}$$

und folglich

$$C=4\pi\epsilon_0\,\frac{l}{2\ln b/a}. \tag{7}$$

6. "Wie groß ist der innere Durchmesser des äußeren Leiters eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen zentral gelegener Leiter ein zylindrisches Kabel mit dem Durchmesser $d=1$mm ist, und dessen Kapazität pro Längeneinheit $3\cdot10^{-11}$F/m ist? "

Umstellen der Formel aus 4. liefert

$$b=ae^{\frac{2\pi\epsilon_0}{C/l}}=3.2\text{mm}. \tag{8}$$

(b) "Berechnen Sie die Kapazität $C$ folgender Kondensatoren:"

Wir nehmen Gesamtladungen von $\pm Q$ wobei $Q > 0$ an.

1. "zwei große ebene, leitende Flächen der Größe $A$ im Abstand $d$ zueinander (Inhomogenitäten des Randfeldes können vernachlässigt werden)"

   Wir wählen quaderförmige Integrationsvolumina die keine, eine bzw. beide Platten einschließen und finden

   $$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi Q}{A}\theta(z)\,\theta(d-z)\,,$$

   wobei die Platte mit Ladungsdichte $Q/A$ ($-Q/A$) im gewählen Koordinatensystem bei $z = 0$ ($z = d$) ist.
   Folglich ist $U = \frac{4\pi Q}{A} d$ und

   $$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{A}{4\pi d} \tag{9}$$

2. "zwei konzentrische leitende Kugeln mit den Radien $a, b$, mit $b > a$"

   Die Anwendung des Gauß'schen Satzen mit kugelförmigen Integrationsvolumina liefert

   $$r^2 E_r(r) = Q\theta(r-a)\theta(b-r).$$

   Folglich ist

   $$U = \left| -\int_a^b E_r(r) \right| = Q\frac{b-a}{ab},$$

   und

   $$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \tag{10}$$

**2. Ampère-Gesetz:**

(a) Innerhalb der inneren Spule

Für die Lösung der Aufgabe benutzen wir das Ampère'sche Gesetz

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \tag{11}$$

jedoch in der Integralform

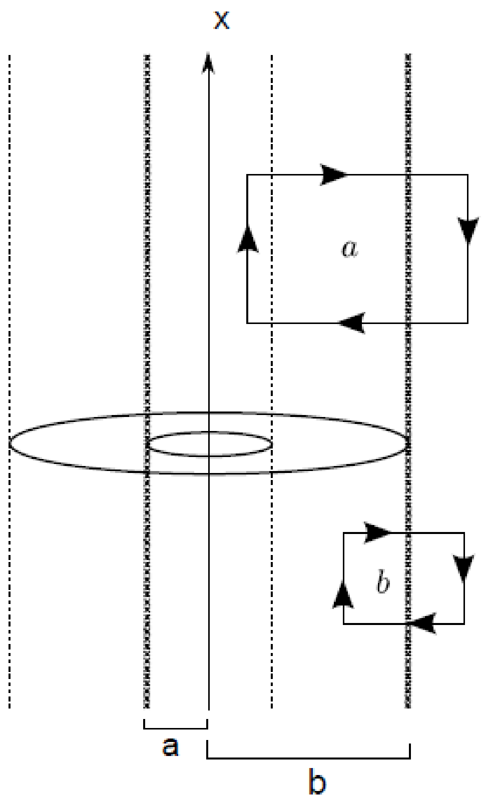



Abbildung 1: Schematische Skizze der Querschnittsfläche durch die beiden Spulen. Der Strom durch die Spulen fließt in unterschiedliche Richtungen und zeigt senkrecht auf die Bildebene (Punkte zeigen aus der Ebene hinaus, Kreuze zeigen in die Ebene hinein).

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int d\vec{A}\vec{j}. \tag{12}$$

Um das Magnetfeld im Inneren der beiden Spulen zu berechnen, legen wir ein Rechteck auf die $y - z$ Ebene, dessen zwei Seiten parallel zur $x$-Achse verlaufen. Eine dieser Seiten liegt innerhalb der inneren Spule, die andere Seite außerhalb der äußeren Spule (siehe Skizze $a$).

Für lange schlanke Spulen ist das Magnetfeld im Inneren der Spule homogen und parallel zur $x$-Achse ausgerichtet, sofern man weit genug von deren Ende entfernt ist. Das Feld außerhalb der Spule muss null sein, damit das Magnetfeld im Unendlichen verschwindet.

Somit ergibt sich aus Gl (12)

$$\begin{aligned} (B_i - \underbrace{B_{\text{außen}}}_{=0})h &= \mu_0 I h(n_1 - n_2). \\ B_i &= \mu_0 I(n_1 - n_2). \end{aligned} \tag{13}$$

(b) Zwischen den beiden Spulen

Um das Magnetfeld im Zwischenraum zu berechnen, integrieren wir Gleichung (12) über die Fläche $b$ aus der Querschnittsfäche. Da das Magnetfeld der inneren Spule hier keinen Einfluss mehr hat (siehe Begründung aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} d\vec{l} &= \mu_0 \int d\vec{A}\vec{j} \\ B_z &= -\mu_0 n_2. \end{aligned} \tag{14}$$

(c) Ausserhalb beider Spulen

$$B_{\text{außen}} = 0. \tag{15}$$