Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

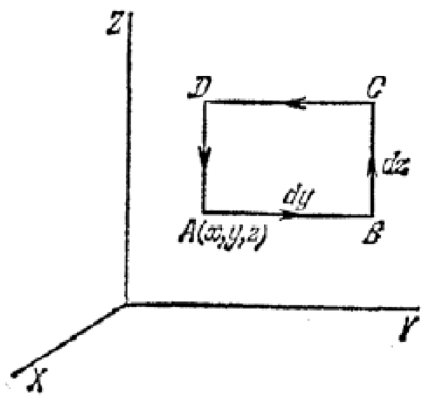
Blatt 4: Lösung
Besprechung 22.11.2013

---

1. Kraft auf Stromverteilung: (10 Punkte)

(a) Lösung 1.

Wir betrachten einen unendlich kleinen, rechteckigen Stromkreis. Jede beliebige Stromverteilung kann als eine Zusammenstellung solcher Kreisen dargestellt werden.



Beschreiben wir die Seiten AB und BC mit der Hilfe von vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die Kräfte, die auf die Seiten AB und CD wirken, sind

$$\vec{F}_{AB} = -I\left[\vec{a}\times\vec{B}_1\right], \quad \vec{F}_{CD} = -\left[\vec{a}\times\vec{B}_2\right],$$

wo $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$ die entsprechende Mittelwerten des Magnetsfeldes sind. Weil

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = -b\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial z},$$

die Summe der Kräfte ist

$$\vec{F}_1 = -I\left[\vec{a}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right]b = -Iab\left[\vec{e}_y\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right] = -M\left[\vec{e}_y\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right],$$

wobei

$$M = Iab = IS$$

das magnetische Moment ist.

Ebenso ist die Summe der Kräfte, die auf die Seiten DA und BC wirken,

$$\vec{F}_2 = M\left[\vec{e}_z \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right].$$

Die gesamte Kraft ist

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\left\{\left[\vec{e}_z \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right] - \left[\vec{e}_y \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right]\right\}.$$

Das ergibt für $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$:

$$\vec{F} = M\left\{\frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial B_z}{\partial z}\vec{e}_x\right\}.$$

Benutzen wir jetzt die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Dann

$$\vec{F} = M\left\{\frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e}_z + \frac{\partial B_x}{\partial x}\vec{e}_x\right\}.$$

Nehmen wir an, dass es keine durchgehende Ströme gibt. Dann

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x},$$

und deswegen

$$\vec{F} = M\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\right) = M\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}.$$

Weil das magnetische Moment $\vec{M}$ die Richtung $\vec{e}_x$ hat, finden wir das Ergebnis

$$\vec{F} = \left(\vec{M}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}.$$

(b) Lösung 2.

Bemerken wir, dass das homogene Magnetfeld keine Kraft anwendet

$$\vec{F} = \int d^3r\left[\vec{j}\times\vec{B}(0)\right] = \left[\left(\int d^3r\vec{j}\right)\times\vec{B}(0)\right] = 0,$$

weil

$$\int d^3r\vec{j} = 0.$$

Dann betrachten wir die räumliche Änderung des inhomogenen Feldes $\vec{B}(\vec{r})$ bis zur führenden Ordnung:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \vec{B}(0) + \sum_{i=1}^{3} r_i\nabla_i\vec{B}(0) + \ldots,$$

sodass

$$\vec{F} \approx \int d^3r \left[\vec{j} \times \sum_{i=1}^{3} r_i \nabla_i \vec{B}(0) \right].$$

Zur Darstellung der Kreuzprodukte kann der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} verwendet werden. Es gilt:

$$c_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \ .$$

Weiterhin gilt

$$a_j b_i - a_i b_j = \sum_k \epsilon_{kji} \left[\vec{a} \times \vec{b} \right]_k ,$$

weil

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}.$$

Wir benutzen auch, dass für die Komponenten der quellfreien Stromdichte $\vec{j}$ gilt

$$\int d^3r \ (r_i j_j + j_i r_j) = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
F_K &\approx \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} j_l r_i \nabla_i B_m(0) = \frac{1}{2} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} \left(j_l r_i - j_i r_l \right) B_m(0) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ilmp} \int d^3r \epsilon_{klm} \epsilon_{pil} \left[\vec{r} \times \vec{j} \right]_p \nabla_i B_m(0) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{imp} \int d^3r \left(\delta_{ki} \delta_{mp} - \delta_{kp} \delta_{mi} \right) \left[\vec{r} \times \vec{j} \right]_p \nabla_i B_m(0) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m} \int d^3r \left\{ \left[\vec{r} \times \vec{j} \right]_m \nabla_k B_m(0) - \left[\vec{r} \times \vec{j} \right]_k \nabla_m B_m(0) \right\}.
\end{aligned}$$

Der lezte Term verschwindet, weil

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0.$$

Im ersten Term benutzen wir die Definition

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\vec{r} \times \vec{j} \right].$$

Wir finden

$$F_k = \sum_m M_m \nabla_k B_m(0)$$

und zwar

$$\vec{F} = \left(\vec{M} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}.$$

2. Leiterschleife im Magnetfeld: (10 Punkte)

(a) Finden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ der Leiterschleife während ihres Falls durch das Magnetfeld als Funktion von t. *Hinweis:* Der durch die elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ in einem Leiter mit Widerstand R induzierte Strom I ist gegeben durch $I = \mathcal{E}/R$.

Die Bewegungsgleichung des vorliegenden Problems lautet

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}_g - \vec{F}_l(t)$$

mit der Gravitationskraft $\vec{F}_g = mg$ in Richtung $-\vec{e}_z$ und der Lorentzkraft $\vec{F}_l$ welche auf die Leiterschleife der Masse m wirkt. Da sich für $t > 0$ das untere Ende der Leiterschleife nicht mehr im Magnetfeld $\vec{B} = (0, B_0, 0)^T$ befindet, gilt

$$\vec{F}_l = I\,\vec{l} \times \vec{B}$$

mit der Parametrisierung $\vec{l} = (a, 0, 0)^T$.
Für die Elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ die in der Leiterschleife, welche die Fläche S mit der normalen $\vec{n}$ umschließt, den Strom I induziert, gilt

$$\mathcal{E} = -\tfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\; da.$$

Man beachte, das von der bewegten Leiterschleife aus gesehen $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ gilt. Daher muss die totale Ableitung $\frac{d}{dt}$ durch die konvektive Ableitung ersetzt werden:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

Setzt man $\vec{B}$ ein folgt wegen der Divergenzfreiheit und des Stokes'schen Satzes

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\; da - \oint_c [\vec{B} \times \vec{v}(t)] \cdot\; d\vec{l}$$

Da das Magnetfeld selbst jedoch für einen bestimmten Aufenthaltsort $\vec{x} = \vec{x}(t)$ der Leiterschleife konstant ist, verschwindet das erste Integral. Für das zweite Integral erhält man

$$-\oint_c [\vec{B} \times \vec{v}(t)] \cdot\; d\vec{l} = -B_0 \vec{v}_z(t) a.$$

Mit $I = \mathcal{E}/R$ (R = Widerstand der Leiterschleife) und der Substitution

$$K = \frac{B_0^2 a^2}{Rm}$$

folgt dann für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + K\vec{v}(t) = -\vec{e}_z g.$$

Da $\vec{B}||\vec{n}$, $\vec{v}||\vec{e}_z$ und sich die Lorentzkräfte auf die Seiten der Leiterschleife parallel zu $\vec{v}$ aufheben, findet die Bewegung der Leiterschleife nur in $\vec{e}_z$ Richtung statt.

Daher reicht es, nur die z-Komponente der Bewegungsgleichung zu betrachten. Die homogene Gleichung hat dann die Lösung

$$v_z^{hom}(t) = k \cdot e^{-Kt}$$

und eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$v_z^{inhom}(t) = -\frac{g}{K}.$$

Die Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = 0$ liefert für die Konstante $k = \frac{g}{K}$ und somit

$$v_z(t) = -\frac{g}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right).$$

(b) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ der Leiterschleife während ihres Falls durch das Magnetfeld im Grenzfall $a \to \infty$. Geben Sie den Zahlenwert für $v_{\max}$ für eine Leiterschleife aus Aluminium (Massendichte $\rho_m = 2.70$ g cm^{-3}, spezifischer Widerstand $\rho = 26.5 \times 10^{-9}$ Ω m) in einem Magnetfeld von 1T an.

Für eine gegeben Massendichte ρ_m gilt $m = 4Aa\rho_m$ und für einen gegebenen spezifischen Widerstand ρ ist $R = 4a\rho/A$. Einsetzten liefert

$$v_z(t) = -\frac{16g\rho\rho_m}{B_0^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B_0^2}{16\rho\rho_m}t\right)\right].$$

Die maximale Geschwindigkeit wird erreicht für $t \to \infty$, daher

$$v_{max} = |\lim_{t\to\infty} \vec{v}_z| = \frac{16g\rho\rho_m}{B_0^2}$$

und für die gegebenen Zahlenwerte (mit T=kg C^{-1} s^{-1} und Ω=m^2 kg C^{-2} s^{-1})

$$v_{max} = \frac{16 \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 26.5 \times 10^{-9}\ \Omega\ \mathrm{m} \times 2.7 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}{1\mathrm{T}^2} \approx 1.12 \times 10^{-2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$