Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. B. Narozhny

Blatt 5: Lösungen

Besprechung 29.11.2013

---

1. Induktivität:

(a) "Berechnen Sie die Selbstinduktivität einer schlanken zylindrischen Spule mit Radius a, Länge $l \gg a$ und Windungszahl n"

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der magnetische Fluss einer Anordnung von Leiterschleifen gegeben ist durch

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i.$$

Die Elemente der Matrix M bezeichnen die Induktionskoeffizienten. Für $M_{ii} \equiv L_i$ spricht man von Selbstinduktivität.

Betrachtet man eine Spule als Anordnung von n identischen Leiterschleifen entlang einer Achse, so folgt ($I_i = I$)

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i = I L_j$$

und daher für die Selbstinduktivität der Spule mit Windungszahl n

$$L = \frac{n\Phi}{I}$$

wobei hier jetzt L die Selbstinduktivität der gesamten Spule und nicht nur einer Schleife der Spule bezeichnet. Setzt man die Definition des magnetischen Flusses ein und verwendet das Ergebnis aus Aufgabe 2a.) von Blatt 3 für nur eine Spule. Damit erhält man

$$L = \mu_0 n^2 \pi \frac{a^2}{l}.$$

(b) "Eine Spule mit Radius a und Windungszahl n_1 liege innerhalb einer längeren Spule mit Radius $b > a$ und Windungszahl n_2. Durch die innere Spule fließe ein Strom I_1. Berechnen Sie den Gesamtfluss durch die äußere Spule aufgrund des Magnetfelds der kurzen Spule"

Wir benutzen, dass für die Gegeninduktivität gilt:

$$M_{12} = M_{21}.$$

Dann berechnen wir den Gesamtfluss durch die *innere* Spule aufgrund des Magnetfelds

$$B_2 \simeq \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2$$

der äußeren Spule mit dem Strom I_2 (für $I_1 = 0$):

$$\Phi_1 = n_1 \pi a^2 B_2 = n_1 \pi a^2 \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2 = M_{12} I_2,$$

wobei l_2 die Länge der äußeren Spule ist ($l_2 \gg b$). Es folgt

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2$$

Damit ist der Gesamtfluss Φ_2 durch die äußere Spule:

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2 I_1.$$

(c) "Berechnen Sie die Gegeninduktivität (Induktivitätskoeffizient M_{12}) zweier paralleler quadratischer Leiterschleifen mit Kantenlänge a. Eine der Leiterschleifen liege in der xy-Ebene bei $z = 0$, die andere bei $z = h$ (Mittelpunkte bei $x = y = 0$)"

Die Gegeninduktion ist gegeben durch die Induktivitätskoeffizienten

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Weiter können wir M_{12} exakt berechnen:

$$M_{12} = 4 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \left\{ \frac{-1}{[a^2 + h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \\ \int dx \ln\left(x + \sqrt{c + x^2}\right) &= x \ln\left(x + \sqrt{c+x^2}\right) - \sqrt{c + x^2}, \end{aligned}$$

erhalten wir weiter

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ 2h - 4\sqrt{a^2+h^2} + 2\sqrt{2a^2+h^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{(a^2+h^2)\left(\sqrt{2a^2+h^2} - a\right)\left(\sqrt{a^2+h^2}+a\right)^3}{h^2\left(\sqrt{a^2+h^2}-a\right)\left(\sqrt{2a^2+h^2}+a\right)^3} \right\}.$$

Für $h \gg a$ erhalten wir

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 a^4}{2\pi h^3}. \tag{1}$$

(d) Berechnen Sie daraus weiterhin die Kraft, die notwendig ist, um die beiden Leiterschleifen mit den Strömen I_1 und I_2 entlang der z-Achse voneinander zu entfernen.

Wir betrachten die im Magnetfeld gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j .$$

Die Kraft ist dann definiert als

$$\vec{F}_{12} = \frac{\partial W_{\text{magn}}}{\partial h}\vec{e}_z .$$

Deswegen

$$F_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial h}\left[M_{12}(h) I_1 I_2 + M_{21}(h) I_1 I_2\right] = \frac{\partial M_{12}(h)}{\partial h} I_1 I_2 .$$

Benutzen wir jetzt das Ergebnis (1):

$$\vec{F}_{12} \simeq -\frac{3\mu_0 a^4}{2\pi h^4} I_1 I_2 \vec{e}_z .$$

2. Polarization:

Für die elektromagnetischen Wellen wählen wir die folgende Eichung:

$$\varphi = 0, \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .$$

Das elektrische Feld erster Welle ist

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left\{i\omega A_1 e^{i(k_x x - \omega t)}\right\}\vec{e}_y = -\frac{\omega}{c} A_1 \vec{e}_y \sin(k_x x - \omega t) .$$

Für die zweite Welle erhalten wir

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left\{i\omega A_2 e^{i(k_x x - \omega t + \delta)}\right\}\vec{e}_z = -\frac{\omega}{c} A_2 \vec{e}_z \sin(k_x x - \omega t + \delta) .$$

(a) “Lineare Polarisation”

Wenn $\delta = 0$, dann

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\omega}{c}\sin(k_x x - \omega t)\left[A_1 \vec{e}_y + A_2 \vec{e}_z\right] .$$

Wenn $\delta = \pi$, dann

$$\vec{E} = -\frac{\omega}{c}\sin(k_x x - \omega t)\left[A_1 \vec{e}_y - A_2 \vec{e}_z\right] .$$

In beide Fälle ist die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes konstant.

(b) “Zirkulare Polarisation”

Wenn $\delta = \pi/2$ und $A_1 = A_2$, bezeichne $E_0 = \omega A_1/c$, und

$$\vec{E} = -E_0 \left[\sin(k_x x - \omega t)\vec{e}_y + \cos(k_x x - \omega t)\vec{e}_z\right]$$

$$= E_0 \left[\sin(k_x x - \omega t + \pi)\vec{e}_y + \cos(k_x x - \omega t + \pi)\vec{e}_z\right].$$

Der Betrag $|\vec{E}|$ ist konstant, aber die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ändert sich innerhalb der senkrecht zum Wellenvektor stehenden Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Damit beschreibt der Vektor $\vec{E}$ einen Kreis.

(c) “die Superposition der zwei zirkular polarisierten Wellen”

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Betrachten wir erst die z-Komponente:

$$E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)\vec{e}_z + E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{e}_z = 2E_0 \cos\frac{\phi_0}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right)\vec{e}_z.$$

Die y-Komponente ist

$$E_0 \sin(kx - \omega t + \phi_0)\vec{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t)\vec{e}_y = 2E_0 \sin\frac{\phi_0}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right)\vec{e}_y.$$

Deswegen finden wir für das Gesamtfeld

$$\vec{E} = 2E_0 \left[\cos\frac{\phi_0}{2}\vec{e}_z + \sin\frac{\phi_0}{2}\vec{e}_y\right] \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right).$$

Die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ist konstant und ist gegeben durch

$$\vec{n} = \cos\frac{\phi_0}{2}\vec{e}_z + \sin\frac{\phi_0}{2}\vec{e}_y.$$

(d) “elliptische Polarisation”

Betrachten wir die Superposition einer linear polarisierten Welle

$$\vec{E}_1 = E_{01}\vec{e}_y \sin(kx - \omega t),$$

und einer zirkular polarisierten Welle

$$\vec{E}_2 = E_{02}\left[\sin(kx - \omega t)\vec{e}_y + \cos(kx - \omega t)\vec{e}_z\right].$$

Für die y-Komponente erhalten wir

$$E_{01} \sin(kx - \omega t) + E_{02} \sin(kx - \omega t) = [E_{01} + E_{02}] \sin(kx - \omega t).$$

Deswegen ist das Gesamtfeld

$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y \sin(kx - \omega t) + E_z \vec{e}_z \cos(kx - \omega t),$$

wobei

$$E_y = E_{01} + E_{02}, \qquad E_z = E_{02}.$$

Der Vektor $\vec{E}$ beschreibt eine Ellipse.