Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 6: Lösungen
Besprechung 06.12.2013

---

1. Coulomb-Eichung:

In der Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{1}$$

Die Stromdichte $\vec{j}$ kann als Summe eines parallelen Anteils $\vec{j}_\parallel$ und eines senkrechten Anteils $\vec{j}_\perp$ geschrieben werden. Es gilt

$$\vec{j}_\parallel(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{2}$$

$$\vec{j}_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{3}$$

(a) Ausgehend von den Gleichungen (2) und (3), finden Sie

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{j}_\perp, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp.$$

Lösung: Wir betrachten zunächst die Divergenz einer Rotation und die Rotation eines Gradienten:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) = \partial_{x_i}\varepsilon_{ijk}\partial_{x_j}a_k = 0\ , \tag{4}$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\cdot b\right)\right]_k = \varepsilon_{ijk}\partial_{x_i}\partial_{x_j}b = 0\ . \tag{5}$$

Beide Ausdrücke verschwinden, da die Kontraktion des antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} mit den symmetrischen Tensoren $\partial_i\partial_j a_k$, bzw. $\partial_i\partial_j b$ verschwindet. Hierbei nehmen wir an, dass a_k und b zweimal stetig differenzierbar sind. Es folgt

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp = 0\ . \tag{6}$$

Betrachten wir nun

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ . \tag{7}$$

Mit der Identiät

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\ , \tag{8}$$

vereinfacht sich Gl. (7) zu

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel = \int \mathrm{d}^3r'\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\ . \tag{9}$$

Betrachten wir nun die verbleibende Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\vec{j}\,(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,. \tag{10}$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \,, \tag{11}$$

erhalten wir aus Gl. (10) und Gl. (5),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{a}\right] = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}^2 \vec{a}\right) \,. \tag{12}$$

Mit diesem Ergebnis und Gl. (8) erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \times \vec{j} \,. \tag{13}$$

Alternativ hätte man auch einfach die Rotation und Divergenz des Stromes betrachten können:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{j}_\parallel}_{0} + \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp \,, \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp}_{0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel \,. \tag{15}$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\parallel, \tag{16}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp. \tag{17}$$

Lösung: Wir betrachten die beiden inhomogenen Maxwell Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \,, \tag{18}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial_t}{c} \vec{E} \,. \tag{19}$$

Wenn wir die Felder durch die elektromagnetischen Potentiale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial_t}{c} \vec{A} \,, \tag{20}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,, \tag{21}$$

ausdrücken, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\varphi - \frac{\partial_t}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\pi\rho \,, \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times A = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta A \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{\partial_t^2}{c^2} \vec{A} - \vec{\nabla} \frac{\partial_t}{c} \varphi \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Durch die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ vereinfachen sich Gl. (22) und Gl. (23) zu

$$\Delta\varphi \;=\; -4\pi\rho\,, \tag{24}$$

$$\Box\vec{A} \;=\; \vec{\nabla}\frac{\partial_t}{c}\varphi - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \tag{25}$$

mit $\Box = \Delta - \partial_t^2/c^2$. Gleichung (24) erkennen wir als Poisson-Gleichung mit der Lösung

$$\varphi(\vec{r},t) \;=\; \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,. \tag{26}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \;=\; 0\,, \tag{27}$$

erhalten wir aus Gl. (26),

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\vec{\nabla}\partial_t\varphi &= \frac{1}{c}\vec{\nabla}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\parallel}\,,\end{aligned} \tag{28}$$

und durch Einsetzen in Gl. (25) folgt,

$$\Box\vec{A} \;=\; \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\parallel} - \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{\parallel}+\vec{j}_{\perp}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\perp}\,. \tag{29}$$

(c) Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_{\parallel}(\vec{k})$ und $\vec{j}_{\perp}(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{j}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{30}$$

Warum werden $\vec{j}_{\parallel}$ und $\vec{j}_{\perp}$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

Lösung: Die Umkehrtransformation zu Gl. (30) lautet

$$\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3r\,\vec{j}(\vec{r})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,. \tag{31}$$

Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int d^3r\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (2\pi)^3\delta(\vec{k})\,, \tag{32}$$

und

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta(\vec{r})\,. \tag{33}$$

Wir betrachten zunächst die parallele Stromdichte. Wir setzen Gl. (30) in die Definition von $\vec{j}_{\parallel}$, Gl. (2), ein,

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\parallel}(\vec{r}) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{j}_{\parallel}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{j}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\\ &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\end{aligned} \tag{34}$$

und translatieren $\vec{r}'$ um $\vec{r}$. Da wir nur translatieren, verändert sich das Integrationsma nicht und da wir über den ganzen Raum integrieren, ändern sich die Integrationsgrenzen nicht:

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\parallel}(\vec{r}) \quad &\overbrace{=}^{\vec{r}_1\equiv\vec{r}'-\vec{r}} \quad -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &(35)\\
&= \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{4\pi}\int d^3r_1\,(i\vec{k})\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,. &(36)
\end{aligned}$$

Mit der Umkehrtransformation (31) und der Relation (32) folgt,

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) &= -\frac{1}{4\pi}i\vec{k}\int d^3r_1\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}\\
&= -\frac{1}{4\pi}i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))\,\int d^3r_1\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}}{|\vec{r}_1|}. &(37)
\end{aligned}$$

Kümmern wir uns nun um die Fouriertransformation von $1/\left|\vec{r}\right|$:

$$\begin{aligned}
\int d^3r\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{r}|} &= \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\int_0^{\infty}dr\;r\;e^{ikr\cos\theta}\\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}dt\int_0^{\infty}dr\;r\;e^{ikrt} = 2\pi\int_0^{\infty}dr\;\frac{1}{ik}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)\\
&= 4\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;\frac{\sin kr}{k}\;. &(38)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die $\hat{z}$-Achse in $\hat{k}$-Richtung gelegt und zu Kugelkoordinaten gewechselt. Wir führen den Konvergenerzeugenden Faktor $\epsilon > 0$ ein (am Ende schicken wir $\epsilon \to 0$) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3r\;\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi}{k}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;e^{-\epsilon r}\sin kr = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;e^{(ik-\epsilon)r}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(ik-\epsilon)r}}{ik-\epsilon}\right]_0^{\infty}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi}{k\left(k^2+\epsilon^2\right)}\mathrm{Im}\;\left[(ik+\epsilon)\left(\cos kr+i\sin kr\right)e^{-\epsilon r}\right]_0^{\infty}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi}{k\left(k^2+\epsilon^2\right)}\mathrm{Im}\;(ik+\epsilon) = \frac{4\pi}{k^2}\;. &(39)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi}i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))\frac{4\pi}{k^2} = \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))}{k^2}\;, \qquad (40)$$

Da die Fouriertransformation linear ist erhalten wir die Komponente $j_{\perp}(\vec{k})$ einfach aus

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\perp}(\vec{k}) &= \vec{j}(\vec{k}) - \vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) = \vec{j}(\vec{k}) - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))}{k^2}\\
&= \left(1-\frac{\vec{k}\vec{k}^T}{k^2}\right)\vec{j}(\vec{k}). &(41)
\end{aligned}$$

Aus Gl. (40) wird ersichtlich, dass $\vec{j}_{||}(\vec{k})$ in $\vec{k}$-Richtung zeigt. Gleichung (41) enthält den Projektor auf den orthogonalen Unterraum zu $\vec{k}$. Insgesamt gilt also

$$\vec{j}_{||}(\vec{k}) \; || \; \vec{k}, \qquad \vec{j}_{\perp}(\vec{k}) \perp \vec{k}\,.$$

Die Bezeichnungen senkrechter (transversaler) Anteil für $\vec{j}_{\perp}$ und paralleler (longitudinaler) Anteil für $\vec{j}_{||}$ beziehen sich also auf die Richtung von $\vec{k}$.

(d) Zwei punktförmige Ladungsverteilungen befinden sich bei $\vec{r}_1 = (0,0,-a)$ und $\vec{r}_2 = (0,0,a)$. Entlang der z-Achse zwischen den Ladungsverteilungen fließt ein konstanter Strom derart, dass die Ladung q_1 monoton mit der Zeit wächst und die Ladung q_2 im gleichen Maße mit der Zeit abnimmt:

$$q_1(t) = q_1(0) + It, \qquad q_2(t) = q_2(0) - It. \tag{42}$$

Berechnen Sie die parallele bzw. senkrechte Stromdichte.

Lösung: Die Strom- und Ladungsdichte des Problems sind

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= -\hat{z}\;\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|)I\,, &(43)\\
\rho &= q_1(t)\delta(x)\delta(y)\delta(a+z) + q_2(t)\delta(x)\delta(y)\delta(a-z)\\
&= \delta(x)\delta(y)[(q_1(0)+It)\delta(a+z) + (q_2(0)-It)\delta(a-z)] &(44)
\end{aligned}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{45}$$

erhalten wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = I\delta(x)\delta(y)[\delta(a-z) - \delta(a+z)]. \tag{46}$$

Zunächst berechnen wir die parallele Stromdichte. Setzen wir $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$ in die Definition von $\vec{j}_{||}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{||}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{I\delta(x')\delta(y')[\delta(a-z')-\delta(a+z')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\\
&= -\frac{I}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-a\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r}+a\hat{z}|}\right)\\
&= \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right). &(47)
\end{aligned}$$

Und damit folgt für den senkrechten Anteil $\vec{j}_{\perp}$,

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\perp}(\vec{k}) &= \vec{j}(\vec{k}) - \vec{j}_{||}(\vec{k})\\
&= -\hat{z}\;\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|)I - \vec{j}_{||}(\vec{k})\\
&= -\frac{I}{4\pi}\left[\hat{z}4\pi\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|) + \frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right]. &(48)
\end{aligned}$$

2. Kugelwelle:

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\vec{E}(r,\vartheta,\varphi,t) = A\frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{e}_\varphi\,, \qquad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c\,. \tag{49}$$

(a) Finden Sie $\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Lösung: Aus Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E}. \tag{50}$$

Die Rotation des in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeld $\vec{E}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(E_\varphi \sin\vartheta) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Mit $\vec{E} \propto \vec{e}_\varphi$ (d.h. mit $E_r = E_\vartheta = 0$) erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(E_\varphi \sin\vartheta)\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta. \tag{52}$$

Mit

$$E_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) = A\frac{\sin\vartheta}{r}F(r), \qquad \text{wobei} \quad F(r,t) = \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\,, \tag{53}$$

ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{A}{r^2\sin\vartheta}\left(F(r,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta\right)\vec{e}_r + \frac{A\sin\vartheta}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r}F(r,t)\right)\vec{e}_\vartheta \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2A\cos\vartheta}{r^2}F(r,t)\,\vec{e}_r + \frac{A\sin\vartheta}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r}F(r,t)\right)\vec{e}_\vartheta \\ &= \frac{2A\cos\vartheta}{r^2}\left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\right]\vec{e}_r \\ &- \frac{A\sin\vartheta}{r}\left[-k\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr^2}\sin(kr - \omega t) - \frac{1}{r}\cos(kr - \omega t)\right]\vec{e}_\vartheta. \end{aligned} \tag{55}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t) &= \frac{2cA\cos\vartheta}{\omega r^2}\left[\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr}\cos(kr - \omega t)\right]\vec{e}_r \\ &- \frac{cA\sin\vartheta}{\omega r}\left[k\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr^2}\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{r}\sin(kr - \omega t)\right]\vec{e}_\vartheta \\ &+ \vec{B}_0(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \vec{B}^w(r, \vartheta, \varphi, t) + \vec{B}_0(r, \vartheta, \varphi), \end{aligned} \tag{56}$$

wobei B_0 unabhängig von t ist.

Nun benutzen wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{57}$$

Zuerst berechnen wir

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{A\omega\sin\vartheta}{cr}\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\hat{e}_\varphi$$
$$= \frac{Ak\sin\vartheta}{r}\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\hat{e}_\varphi \tag{58}$$

und dann

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(-\frac{\partial B^w_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial B^w_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\vartheta$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB^w_\vartheta)-\frac{\partial B^w_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi+\vec{\nabla}\times\vec{B}_0 \tag{59}$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB^w_\vartheta)-\frac{\partial B^w_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi+\vec{\nabla}\times\vec{B}_0. \tag{60}$$

Mit Gl. (56) ergibt sich:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^w = \frac{cA}{\omega r}\Big\{-\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left[k\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{kr^2}\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{r}\sin(kr-\omega t)\right]$$
$$- \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ \cos\vartheta\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\Big\}\vec{e}_\varphi$$
$$= -\frac{cA\sin\vartheta}{\omega r}\Big[-k^2\sin(kr-\omega t)+\frac{2}{kr^3}\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{r^2}\sin(kr-\omega t)$$
$$+ \frac{1}{r^2}\sin(kr-\omega t)-\frac{k}{r}\cos(kr-\omega t)+$$
$$- \frac{2}{r^2}\sin(kr-\omega t)-\frac{2}{kr^3}\cos(kr-\omega t)\Big]\vec{e}_\varphi \tag{61}$$
$$= -\frac{cA\sin\vartheta}{\omega r}\left[-k^2\sin(kr-\omega t)-\frac{k}{r}\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e}_\varphi \tag{62}$$
$$= \frac{Ak\sin\vartheta}{r}\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e}_\varphi \tag{63}$$
$$= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{64}$$

Es folgt

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}_0 = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{65}$$

Für $j=0$ setzen wir $\vec{B}_0=0$:

$$\vec{B}(r,\vartheta,\varphi,t) = \frac{A}{kr^2}\Big\{2\cos\vartheta\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e}_r$$
$$- \sin\vartheta\left[kr\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)-\sin(kr-\omega t)\right]\vec{e}_\vartheta\Big\}. \tag{66}$$

(b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\vec{I}=\langle\vec{S}\rangle$, indem Sie über eine Periode mitteln.

Lösung: Der Poynting-Vektor is gegeben durch

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{67}$$

Mit Gl. (49) und Gl. (66) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\,\frac{A\sin\vartheta}{r}\left[\cos\left(kr-\omega t\right) - \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\omega t\right)\right]\hat{e}_\varphi \\
&\times \frac{A}{kr^2}\Big\{2\cos\vartheta\left[\sin\left(kr-\omega t\right) + \frac{1}{kr}\cos\left(kr-\omega t\right)\right]\vec{e}_r \\
&- \sin\vartheta\left[kr\cos\left(kr-\omega t\right) - \frac{1}{kr}\cos\left(kr-\omega t\right) - \sin\left(kr-\omega t\right)\right]\vec{e}_\vartheta\Big\} \\
&= \frac{cA^2\sin\vartheta}{4\pi kr^3}\left[\cos\left(kr-\omega t\right) - \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\omega t\right)\right] \\
&\cdot \Big\{2\cos\vartheta\left[\sin\left(kr-\omega t\right) + \frac{1}{kr}\cos\left(kr-\omega t\right)\right]\vec{e}_\vartheta \\
&+ \sin\vartheta\left[kr\cos\left(kr-\omega t\right) - \frac{1}{kr}\cos\left(kr-\omega t\right) - \sin\left(kr-\omega t\right)\right]\vec{e}_r\Big\} \\
&= \frac{cA^2\sin\vartheta}{4\pi kr^3}\Big\{2\cos\vartheta\Big[\sin\left(kr-\omega t\right)\cos\left(kr-\omega t\right)\left(1-\frac{1}{k^2r^2}\right) \\
&+ \frac{1}{kr}\left(\cos^2\left(kr-\omega t\right) - \sin^2(kr-\omega t)\right)\Big]\vec{e}_\vartheta + kr\sin\vartheta\Big[\cos^2\left(kr-\omega t\right)\left(1-\frac{1}{k^2r^2}\right) \\
&- \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\omega t\right)\cos\left(kr-\omega t\right)\left(2-\frac{1}{k^2r^2}\right) + \frac{1}{k^2r^2}\sin^2\left(kr-\omega t\right)\Big]\vec{e}_r\Big\}
\end{aligned} \tag{68}$$

Der Intensitätsvektor $\vec{I} = \langle\vec{S}\rangle$ ergibt sich (mit $\langle\sin(kr-\omega t)\cos(kr-\omega t)\rangle = 0$ und $\langle\sin^2(kr-\omega t)\rangle = \langle\cos^2(kr-\omega t)\rangle = 1/2$):

$$\begin{aligned}
\vec{I} = \langle\vec{S}\rangle &= \frac{cA^2\sin\vartheta}{4\pi kr^3}\left\{kr\sin\vartheta\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k^2r^2}\right) + \frac{1}{2k^2r^2}\right]\vec{e}_r\right\} \\
&= \frac{cA^2\sin^2\vartheta}{8\pi r^2}\vec{e}_r.
\end{aligned} \tag{69}$$