Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. B. Narozhny

Blatt 7: Lösung

Besprechung 13.12.2013

---

1. Hertzscher Dipol::

(a) "Schwingsgleichung"

Die Spannung am "Kondensator"

$$U_K = \frac{Q}{C}.$$

Die Spannung an der Spule (die elektromotorische Kraft)

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Hier $I = \partial Q/\partial t$.
Schwingsgleichung:

$$U_K = \mathcal{E}_L \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q}{C} = -L\frac{\partial I}{\partial t},$$

deswegen

$$\frac{Q}{C} + L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{Q} + \omega_0 Q = 0,$$

wobei die Resonanzfrequenz ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Wenn die Kugeln am Anfang ($t = 0$) die Ladung Q_0 hatten, dann $\alpha = 0$.
Der Strom ist dann

$$I(t) = \dot{Q} = Q_0\omega_0 \sin\omega_0 t.$$

Die Energie im Kreis ist

$$E(t) = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q_0^2 L\omega_0^2 \sin^2\omega_0 t + \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{L}{LC}\sin^2\omega_0 t + \frac{1}{C}\cos^2\omega_0 t\right]$$

Deswegen ist die Energie erhalten

$$E(t) = E(0) = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

(b) “Strahlung des Dipolmoments”

Benutzen Sie die folgende Relation zwischen dem Vektorpotential $\vec{A}$ und dem Dipolmoment ($\vec{p}$ ist hier die Amplitude)

$$\vec{A} = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}e^{i\omega t}.$$

Dann ist das Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

in Fernfeldnährung ($kr \gg 1$)

$$\vec{B} = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{n} \times \vec{p}e^{i\omega t},$$

wobei $\vec{n} = \vec{r}/r$.
Das elektrische Feld in Fernfeldnährung

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B} = -k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{p}e^{i\omega t}\right) = -\vec{n} \times \vec{B}.$$

Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor ist

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{4\pi}\left\langle \mathrm{Re}\vec{E} \times \mathrm{Re}\vec{B} \right\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\langle \vec{E}^* \times \vec{B} \right\rangle = -\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{n} \times \vec{B}^* \times \vec{B}\right).$$

Das kann man vereinfachen mit Hilfe von

$$\vec{n} \times \vec{B}^* \times \vec{B} = -\vec{n}\left(\vec{B}^* \cdot \vec{B}\right) + \vec{B}^*\left(\vec{n} \cdot \vec{B}\right) = -\vec{n}\left(\vec{B}^* \cdot \vec{B}\right).$$

Deswegen finden wir

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{8\pi}\vec{n}\left(\vec{B}^* \cdot \vec{B}\right) = \frac{c}{8\pi}\vec{n}\frac{k^4}{r^2}(\vec{n} \times \vec{p})^2.$$

Die (zeitlich gemittelte) Leistung abgestrahlte in den Raumwinkel $d\Omega$ in Richtung $\vec{n}$ ist

$$dP = \left\langle \vec{S} \right\rangle \vec{n}r^2 d\Omega,$$

deswegen

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}p^2\sin^2\theta.$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist dann

$$P = \int d\Omega\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}p^2 2\pi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\sin^2\theta = \frac{\omega^4}{3c^3}p^2.$$

(c) “Effektiver Widerstand”

Für zwei Kugeln ist das Dipolmoment

$$p = Q_0 d.$$

Der Heizwiderstand ist (zeitlich gemittelt)

$$\mathcal{P} = \left\langle RI^2 \right\rangle = \frac{1}{2} R Q_0^2 \omega_0^2.$$

Deswegen finden wir den effektiven Widerstand

$$\frac{\omega_0^4}{3c^3} Q_0^2 d^2 = \frac{1}{2} R Q_0^2 \omega_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{2\omega_0^2 d^2}{3c^3}.$$

(d) “Dämpfung der Schwingungen”

Ein RLC-Reihenschwingkreis kann man durch folgende (lineare) Differentialgleichung beschreiben:

$$\frac{Q}{C} + RI = -L\frac{\partial I}{\partial t},$$

oder

$$\ddot{Q} + \beta \dot{Q} + \omega_0 Q = 0, \qquad \beta = \frac{R}{L}.$$

Geht man davon aus, dass die Verluste im Schwingkreis gering sind ($\beta^2 < \omega_0^2$) und fhrt noch die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/4}.$$

Dann finden wir die Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t/2} \cos \omega t.$$

Die Zerfallrate ist dann durch den effektiven Widerstand definiert

$$\beta/2 = \frac{R}{2L}.$$

D.h. nach der Zeit

$$t_0 = \frac{2L}{R} = \frac{3c^3 L}{\omega_0^2 d^2},$$

wird die Schwingungsweite exponentiell reduziert.

Hier verhachlässigen wir die Tatsache dass der Dipolmoment (und deswegen der effektiver Widerstand) auch mit der Ladung verschwindet. Deswegen ist unser Ergebnis nur eine Abschätzung der Zerfallrate.