Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 8: Lösungen
Besprechung 20.12.2013

---

1. Elektrische Ladung:

Die Vierstromdichte ist gegeben durch

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right).$$

Hier die übliche Stromdichte ist

$$\vec{j} = \rho\vec{v},$$

deswegen

$$j^\mu = (c\rho, \rho\vec{v}) = \rho\,(c, \vec{v})\,.$$

Erinnern wir der 4-Vektor

$$x^\mu = (ct, \vec{x})\,.$$

Dann

$$(c, \vec{v}) = \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Das ist kein 4-Vektor, weil die Zeit dt kein Skalar ist. Man kann aber ein 4-Vektor einführen

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds},$$

wobei s der Abstand ist. Der Abstand ist ein Skalar, deswegen ist die 4-Geschwindigkeit u^μ ein 4-Vektor. Insbesondere

$$ds = cd\tau = ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1, \frac{v}{c}\right),$$

und

$$u^\mu u_\mu = 1.$$

Dadurch finden wir die Vierstromdichte in der Form

$$j^\mu = \rho c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}u^\mu.$$

Wenn die beide j^μ und u^μ 4-Vektoren sind, dann muss die folgende Größe ein Skalar sein:

$$\rho c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Die Ladungsdichte ist

$$\rho = \frac{dQ}{dV}.$$

Das Volumenelement

$$dV = dV_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

wobein dV_0 das Volumenelement im Ruhesystem ist. Deswegen

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dQ}{dV_0}.$$

Dann finden wir für die Ladung

$$\frac{dQ}{dV_0} = \rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Es folgt jetzt, dass die Ladung ein Skalar ist.

2. Maxwell-Gleichungen:

Wir benutzen die folgenden expliziten Formen:

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right),$$

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right),$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir erst die Komponentex mit $\nu = 0$:

$$j^0 = c\rho \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi\rho.$$

Auf der linken Seite haben wir

$$F^{\mu 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 0} = 0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{E}.$$

Dadurch finden wir die üblichen Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho.$$

Jetzt betrachten wir $\nu = 1$. Hier

$$j^1 = j_x \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{4\pi}{c}j_x.$$

Auf der linken Seite haben wir

$$F^{\mu 1} = \begin{pmatrix} -E_x \\ 0 \\ B_z \\ -B_y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}.$$

Ebenso für $\nu = 2$ und $\nu = 3$

$$F^{\mu 2} = \begin{pmatrix} -E_y \\ -B_z \\ 0 \\ B_x \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x},$$

und

$$F^{\mu 3} = \begin{pmatrix} -E_z \\ B_y \\ -B_x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu F^{\mu 1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.$$

Bemerken wir jetzt das Kreuzprodukt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right] - \vec{e}_y \left[\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right] + \vec{e}_z \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right].$$

Deswegen finden wir die üblichen Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$