

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 9: Lösungen
Besprechung 10.01.2014

1. Lineare Operatoren:

Die Operatoren \hat{I} , \hat{T}_a , \hat{M}_c , und \hat{P}_{12} sind lineare Operatoren. Der Operator \hat{K} ist kein lineare Operator.

a. Adjungierte Operatoren

Betrachten wir z.B. die Parallelverschiebung. Wir finden den adjungierten Operator von der Gleichung

$$\int \Psi^*(x) \hat{T}_a \Phi(x) dx = \int [\hat{T}_a^\dagger \Psi(x)]^* \Phi(x) dx.$$

Explizit:

$$\int \Psi^*(x) \hat{T}_a \Phi(x) dx = \int \Psi^*(x) \Phi(x+a) dx = \int \Psi^*(x-a) \Phi(x) dx.$$

Deswegen

$$\hat{T}_a^\dagger \Psi(x) = \Psi(x-a) = \hat{T}_{-a} \Psi(x).$$

Ganz ähnlich finden wir für die anderen Operatoren:

- $$\int \Psi^*(x) \hat{I} \Phi(x) dx = \int \Psi^*(x) \Phi(-x) dx = \int \Psi^*(-x) \Phi(x) dx.$$

Deswegen

$$\hat{I}^\dagger \Psi(x) = \Psi(-x) = \hat{I} \Psi(x).$$

- $$\int \Psi^*(x) \hat{M}_c \Phi(x) dx = \sqrt{c} \int \Psi^*(x) \Phi(cx) dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \Psi^*(x/c) \Phi(x) dx.$$

Deswegen

$$\hat{M}_c^\dagger \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \Psi(x/c) = \hat{M}_{1/c} \Psi(x).$$

•

$$\begin{aligned} \int \Psi^*(x_1, x_2) \hat{P}_{12} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int \Psi^*(x_1, x_2) \Phi(x_2, x_1) dx_1 dx_2 \\ &= \int \Psi^*(x_2, x_1) \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Deswegen

$$\hat{P}_{12}^\dagger \Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1) = \hat{P}_{12} \Psi(x_1, x_2).$$

b. Inverse Operatoren.

Für allen Operatoren können wir die inversen Operatoren finden:

$$\hat{I}^{-1} = \hat{I}; \quad \hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a}; \quad \hat{M}_c^{-1} = \hat{M}_{1/c}; \quad \hat{K}^{-1} = \hat{K}; \quad \hat{P}_{12}^{-1} = \hat{P}_{12}.$$

2. Impulsoperator:

(a) Selbstadjungierter Operator:

Für jede Komponente des Impulsoperators gilt es:

$$\int \varphi \hat{p}_x \psi dx = -i\hbar \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} = i\hbar \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \psi \hat{p}_x^* \varphi dx.$$

Benötigen Sie, dass die beide Funktionen φ und ψ im unendlichen verschwinden müssen.

(b) Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Eigenwertproblem stellen wir mit der Hilfe der folgenden Vektorgleichung dar:

$$-i\hbar \vec{\nabla} \psi = \vec{p} \psi.$$

Die Lösung ist durch die Fourier-Transformation gegeben:

$$\psi_{\vec{p}} = C e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}.$$

Die Konstante findet man von der Normalisierung

$$\int \psi_{\vec{p}}^* \psi_{\vec{p}'} dV = (2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

wobei $\delta^{(3)}(\vec{p})$ eine dreidimensionale Delta-Funktion ist. Hier benutzen wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iaz} = \delta(z),$$

und die Tatsache dass

$$\delta^{(3)}(\vec{p}) = \delta(p_x)\delta(p_y)\delta(p_z).$$

Das ergibt

$$C = 1.$$

D.h., die Eigenvektoren des Impulsoperators sind

$$\psi_{\vec{p}} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Benötigen Sie dass hier

$$|\psi|^2 = 1.$$

Die Eigenwerte sind die "Impulse" \vec{p} :

$$\hat{\vec{p}}\psi_{\vec{p}} = \vec{p}\psi_{\vec{p}}.$$

3. Zweizustandssystem:

(a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Pauli-Matrizen

Betrachten wir den Operator $\hat{\sigma}_x$:

$$\hat{\sigma}_x\psi_{s_x} = s_x\psi_{s_x} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

deswegen haben wir die folgenden Gleichungen:

$$b = s_x a, \quad a = s_x b.$$

Das ergibt die Eigenwerte

$$s_x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_x = \pm 1.$$

Hier für $s_x = 1$ finden wir $a = b$ (und für $s_x = -1$ finden wir $a = -b$). Letztendlich benutzen wir die Normalisierung

$$\langle \psi_{s_x} | \psi_{s_x} \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

und finden die Eigenvektoren:

$$\psi_{s_x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{s_x=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ähnlicherweise finden wir für die anderen Pauli-Matrizen:

$$\psi_{s_y=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \psi_{s_y=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\psi_{s_z=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{s_z=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Der Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}_x$ in einem von der Eigenzuständen des Operators $\hat{\sigma}_z$

$$\langle \psi_{s_z=1} | \hat{\sigma}_x | \psi_{s_z=1} \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- (c) Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_z$ in der Basis der Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_x$

$$\psi_{s_z=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{s_x=1} + \psi_{s_x=-1}],$$

$$\psi_{s_z=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{s_x=1} - \psi_{s_x=-1}].$$