Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Probeklausur: Lösungen
Besprechung 24.01.2014

---

1. Leitende Fläche:

(a) "das elektrische Feld auf der Oberfläche"

Die Spiegelladungen $q_3 = -Q$ und $q_4 = Q$ liegen dann in Punkten $(-b/2, 0, -a)$ und $(b/2, 0, -a)$. Das Gesamtpotential ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{4} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x+b/2)^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-b/2)^2 + y^2 + (z-a)^2}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x+b/2)^2 + y^2 + (z+a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-b/2)^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right].
\end{aligned}
$$

Das elektrische Feld auf der Fläche ist senkrecht

$$
\vec{E}(x, y, 0) = -\vec{e}_z \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0},
$$

$$
\vec{E}(x, y, 0) = -\vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[(x+b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x-b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \right].
$$

(b) "Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte"

Die Oberflächenladungsdichte ergibt sich aus dem Sprung des elektrischen Feldes

$$
\sigma(x, y) = -\frac{Qa}{2\pi} \left[\frac{1}{[(x+b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x-b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \right].
$$

(c) “Berechnen Sie die gesamte induzierte Ladung”

$$Q_{\text{ind}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(x,y) = q_3 + q_4 = 0.$$

(d) Das Gesamtfeld für $|\vec{r}| \gg a, b$ ist das Quadrupolfeld, weil die Gesamtladung und die Gesamptdipolmoment Null sind.

2. Elektromagnetische Wellen:

(a) “das Magnetfeld in der Welle”

Das Magnetfeld erfüllt die gleiche Wellengleichung als das elektrischen Feld. Um die Phasen und Amplituden zu bestimmen, benutzen wir die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Auf der rechten Seite finden wir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_x k E_y \sin(kz - \omega t - 2) - \vec{e}_y k E_x \sin(kz - \omega t).$$

Deswegen finden wir für das Magnetfeld ($\omega = ck$)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = E_x \vec{e}_y \cos(\omega t - kz) - E_y \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + 2).$$

(b) “der Poynting-Vektor”

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B},$$

$$\vec{S} = \vec{e}_z \frac{c}{4\pi} \left(E_x B_y - E_y B_x\right) = \vec{e}_z \frac{c}{4\pi} \left[E_x^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_y^2 \cos^2(\omega t - kz + 2)\right].$$

Die Zeitmittelung:

$$\left\langle \cos^2(...) \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Deswegen ist der zeitgemittelten Poynting-Vektor

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \vec{e}_z \frac{c}{8\pi} \left[E_x^2 + E_y^2\right].$$

(c) “das Vektorpotential”

Das Vektorpotential erfüllt die gleiche Wellengleichung als das elektrischen Feld. Die Phasen und Amplituden finden wir von

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Deswegen:

$$\vec{A} = \vec{e}_x \frac{c}{\omega} E_x \sin(kz - \omega t) + \vec{e}_y \frac{c}{\omega} E_y \sin(kz - \omega t - 2).$$

Natürlich kann man das Magnetfeld (siehe Aufgabe a) als einen Rotor von $\vec{A}$ finden

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

(d) Die Welle ist elliptisch polarisiert.

3. Elektromagnetische Induktion:

(a) “der induzierte Strom”

Die elektromotorische Kraft ist gegeben durch (in SI)

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

wobei Φ der Magnetfluss ist. Der Magnetfluss ist gleich dem Skalarprodukt aus dem Felb $\vec{B}$ und dem Flächenvektor $\vec{S}$ (Normalenvektor der Fläche):

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS_{\perp} = Ba^2 \cos \omega t.$$

Der induzierte Strom finden wir mit Hilfe von dem Ohmischen Gesetz:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Ba^2\omega}{R} \sin \omega t.$$

(b) “die Verlustleistung”

Die Leistung finden wir als

$$P = I^2 R = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{R} \cos^2 \omega t.$$

Die zeitgemittelte Leistung ist dann

$$\langle P \rangle = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{2R}.$$

(c) Die dissipierte Energie kommt von dem Drehantrieb.

(d) "die Selbstinduktion"

Die Selbstinduktion können wir abschätzen als

$$L \sim \mu_0 a \ln \frac{a}{r_0},$$

wobei r_0 der Radius der Rahmensseite ist.
Die Selbstinduktion können wir vernachlässigen wenn

$$\left| L\frac{dI}{dt} \right| \ll |\mathcal{E}|\,.$$

Benutzen wir die obige Lösung

$$L\frac{dI}{dt} = L\frac{Ba^2\omega^2}{R}\cos\omega t.$$

Deswegen ist unsere Nährung gültig wenn

$$\mu_0\omega\frac{a}{R}\ln\frac{a}{r_0} \ll 1.$$

4. Unschärferelationen:

(a) "Die Normierungskonstante"

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x)|^2 = N^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2ax^2} = N^2\sqrt{\frac{\pi}{2a}} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad N = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}.$$

(b) "die Mittelwerte"

$$\langle x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x\,|\psi(x)|^2 = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-2ax^2} = 0.$$

$$\langle \vec{p} \rangle = -i\hbar\vec{e}_x\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}e^{-ax^2}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}e^{-ax^2} = \hbar k\vec{e}_x.$$

(c) “die Mittelwerte von der Quadrate”

$$\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-2ax^2} = \frac{1}{4a}.$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{p}^{\,2} \right\rangle &= -\hbar^2 \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ikx} e^{-ax^2} \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[4a^2x^2 - 2iakx - k^2 - 2a \right] e^{-2ax^2} \\
&= \hbar^2 \left(k^2 + a \right).
\end{aligned}$$

(d) “die Gültigkeit der Unschärferelationen”

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{4a}.$$

$$(\Delta p_x)^2 = \left\langle p_x^2 \right\rangle - \langle p_x \rangle^2 = \hbar^2 a.$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

5. Spin-1/2 Zustände:

(a) “die Eigenwerte und Eigenvektoren”

Die Eigenwerte sind

$$f_1 = 1 + \sqrt{2}, \qquad f_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Die Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \end{pmatrix}.$$

(b) “die Zeitentwicklung”

Zustand (i)

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\, v_1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\, v_2.$$

Die Zeitentwicklunng:

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\, v_1 e^{-if_1 t/\hbar} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\, v_2 e^{-if_1 t/\hbar}.$$

Zustand (ii)

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}\, v_1 - \frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}\, v_2.$$

Die Zeitentwicklunng:

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{2}\, v_1 e^{-if_1 t/\hbar} - \frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}\, v_2 e^{-if_1 t/\hbar}.$$