

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 1
Besprechung 25.10.2013

1. Dirac'sche Deltafunktion:

Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ hat die Eigenschaft $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Für beliebige (hinreichend glatte) Funktionen $f(x)$ gilt

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0), & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Insbesondere gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1.$$

Es gibt viele Möglichkeiten, die Deltafunktion durch einen Grenzübergang aus "gewöhnlichen" Funktionen zu konstruieren.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Deltafunktion darstellen lässt durch

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\epsilon(x - x_0), \quad \text{mit } L_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2},$$

und

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_\epsilon(x - x_0), \quad \text{mit } G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2},$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

Hier sei $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen an den Punkten x_n und im Nenner steht der Betrag der Ableitung

$$g'(x_n) = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_n}.$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} dx x^2 \delta(x^2 - 6x + 8).$$

(d) Berechnen Sie mit einer beliebigen Testfunktion $f(x)$ das Integral

$$\int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x - b + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

(e) Bestimmen Sie die folgende Eigenschaften:

$$x \delta(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0).$$

2. Nabla-Kalkül:

Hier verwenden wir die folgenden Symbole:

$$\vec{\nabla} f \equiv \text{grad} f, \quad \vec{\nabla} \vec{u} \equiv \text{div} \vec{u}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \text{rot} \vec{v}, \quad \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta.$$

(a) Finden Sie (mit $r \equiv |\vec{r}|$)

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla} \vec{r}, \quad \vec{\nabla} \frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r}, \quad \vec{\nabla} f(r), \quad \vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \right].$$

(b) Berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \left(e^{i\vec{k}\vec{r}} \right), \quad \vec{\nabla} \left(\vec{d} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right), \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{d} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right),$$

wobei \vec{k} und \vec{d} die konstante Vektoren sind.

(c) Rechnungen, die in der Elektrodynamik auftreten, verwenden oft folgende Identitäten. Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla} (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} (\vec{\nabla} \times \vec{w}),$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w},$$

gilt, wobei $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ die Vektorfunktionen sind.

(d) Bestimmen Sie die folgende Produktregeln

$$\vec{\nabla} (f \vec{v}) = \vec{v} (\vec{\nabla} f) + f \vec{\nabla} \vec{v}, \quad \vec{\nabla} \times (f \vec{v}) = -\vec{v} \times (\vec{\nabla} f) + f \vec{\nabla} \times \vec{v},$$

wobei $\vec{v}(\vec{r})$ eine Vektorfunktion ist und $f(\vec{r})$ eine Skalarfunktion ist.

(e) Bestimmen Sie die folgende Kettenregeln

$$\vec{\nabla} \vec{P}(f(\vec{r})) = \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \vec{\nabla} f(\vec{r}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{P}(f(\vec{r})) = -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \times (\vec{\nabla} f(\vec{r})),$$

mit $\dot{\vec{P}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial f}$. Hier $\vec{P}(f)$ ist ein Vektorfeld auf \mathbb{R} .