Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 10
Besprechung 17.01.2014

---

1. Erwartungswert, Variation und Unschärfe-Relation: (15 = 5 + 5 + 5 Punkte)

Gegeben sei die Wellenfunktion eines Teilchens in 1-D:

$$\psi(x) = \mathcal{N}\,(a + bx + cx^2)\,\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \ ,$$

wobei a, b und c reell sind.

a) Bestimmen Sie den Normierungskoeffizient $\mathcal{N}$.

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle$. Hier ist $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ der Impulsoperator.

c) Berechnen Sie die Variationen $(\Delta x)^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ und $(\Delta p)^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$ und überzeugen Sie sich, dass die Unschärfe-Relation $(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar/2$ gilt.

Hinweis:

$$\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ .$$

2. Spin-1/2 (Quantenbit): (15 = 5 + 5 + 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unschärferelationen eng verknüpft sind mit den Kommutatoren von Operatoren. Im allgemeinen gilt

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2$$

wobei $[\hat{A},\hat{B}]$ ein Kommutator ist: $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

Bei Spin 1/2 werden die so genanten *Pauli-Matrizen* σ_i $(i = x, y, z)$ benutzt

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Spinoperator ist dabei definiert als $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$.

a) Überprüfen Sie mit einer expliziten Rechnung dass die Pauli-Matrizen den folgenden Relationen genügen

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\,\sigma_z \qquad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\,\sigma_x \qquad [\sigma_x, \sigma_z] = -2i\,\sigma_y$$
$$\sigma_x^2 = 1 \qquad \sigma_y^2 = 1 \qquad \sigma_z^2 = 1$$

b) Der Zustand des Spin-1/2 (Quantenbits) ist gegeben durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \ .$$

Hier $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die Eigenzustände des Operators σ_z: $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ und $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{S}_i \rangle$ und die Variationen $(\Delta S_i)^2$ für $i = x, y, z$ für den Zustand $|\psi\rangle$.

c) Überprüfen Sie für den Zustand $|\psi\rangle$ die Unschärferelationen

$$(\Delta S_x)^2(\Delta S_y)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{S}_x, \hat{S}_y]\rangle\right)^2$$

$$(\Delta S_x)^2(\Delta S_z)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{S}_x, \hat{S}_z]\rangle\right)^2$$

$$(\Delta S_y)^2(\Delta S_z)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{S}_y, \hat{S}_z]\rangle\right)^2$$