Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik   WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 12
Besprechung 07.02.2014

---

1. Drehimpulsoperator: (10 Punkte)

Der Drehimpulsoperator ist gegeben durch

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}.$$

Finden Sie die folgenden Kommutatoren:

(a)

$$\left[\hat{L}_i, \hat{\vec{r}}^{\,2}\right], \quad \left[\hat{L}_i, \hat{\vec{p}}^{\,2}\right], \quad \left[\hat{L}_i, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right];$$

(b)

$$\left[\hat{L}_i, \left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right) \hat{p}_k\right], \quad \left[\hat{L}_i, \left(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}\right) \hat{x}_k\right], \quad \left[\hat{L}_i, a\hat{x}_k + b\hat{p}_k\right];$$

(c)

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_k \hat{x}_l\right], \quad \left[\hat{L}_i, \hat{p}_k \hat{p}_l\right], \quad \left[\hat{L}_i, \hat{x}_k \hat{p}_l\right].$$

2. Leiteroperatoren: (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Eigenzustände des Operators $\hat{L}_z$

$$\hat{L}_z \psi_m = \hbar m \psi_m.$$

Zeigen Sie dass die Eigenwerte m bei Anwendung eines Leiteroperators ($\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$) auf die Zustände ψ_m um 1 erhöht oder erniedrigt werden

$$\hat{L}_+ \psi_m = c_+ \psi_{m+1}, \quad \hat{L}_- \psi_m = c_- \psi_{m-1}.$$

(b) Zeigen Sie dass es in einem Zustand ψ_m gilt

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0,$$
$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle,$$
$$\langle \hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x \rangle = 0.$$

(c) Betrachten Sie jetzt die Zustände $|l, m\rangle$, die die Eigenzustände den Operatoren $\hat{L}_z$ und $\hat{\vec{L}}^2$ sind:

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle, \qquad \hat{\vec{L}}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle.$$

In einem Zustand mit $l = 1$ finden Sie

$$\langle L_x^n \rangle, \qquad \langle L_y^n \rangle.$$