Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 6
Besprechung 06.12.2013

---

1. Coulomb-Eichung: (20 Punkte)

In der Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Anderseits, erzeugt die Rotation des Vektorpotentials die magnetische Induktion

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}(\vec{r}, t).$$

Auf die gleiche Weise, kann man jedes Feld als die Superposition zweier Komponenten darstellen, einer mit der verschwindenden Rotation und einer mit verschwindenden Divergenz. Für die Stromdichte $\vec{j}$ gilt es

$$\vec{j} = \vec{j}_\parallel + \vec{j}_\perp,$$

wobei

$$\vec{j}_\parallel(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\vec{j}_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

(a) Ausgehend von den obigen Gleichungen, finden Sie

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp.$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\parallel,$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp.$$

(c) Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_\parallel(\vec{k})$ und $\vec{j}_\perp(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, \vec{j}(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Warum werden $\vec{j}_\parallel$ und $\vec{j}_\perp$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

(d) Zwei punktförmige Ladungsverteilungen befinden sich bei $\vec{r}_1 = (0, 0, -a)$ und $\vec{r}_2 = (0, 0, a)$. Entlang der z-Achse zwischen den Ladungsverteilungen fließt ein konstanter Strom derart, dass die Ladung q_1 monoton mit der Zeit wächst und die Ladung q_2 im gleichen Maße mit der Zeit abnimmt:

$$q_1(t) = q_1(0) + It, \qquad q_2(t) = q_2(0) - It. \tag{1}$$

Berechnen Sie die parallele bzw. senkrechte Stromdichte.

2. Kugelwelle: (10 Punkte)

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi, t) = A\frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\right]\hat{e}_\varphi\,, \qquad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c\,.$$

(a) Finden Sie $\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\vec{I} = \langle\vec{S}\rangle$, indem Sie über eine Periode mitteln.