Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik WS 2013/2014

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. B. Narozhny

Blatt 9

Besprechung 10.01.2014

---

1. Lineare Operatoren: (20 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Operatoren ($-\infty < x < \infty$):

- Spiegelung:
$$\hat{I}\Psi(x) = \Psi(-x);$$
- Parallelverschiebung:
$$\hat{T}_a\Psi(x) = \Psi(x+a);$$
- Reskalierung:
$$\hat{M}_c\Psi(x) = \sqrt{c}\Psi(cx);$$
- Konjugation:
$$\hat{K}\Psi(x) = \Psi^*(x);$$
- Transposition:
$$\hat{P}_{12}\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1).$$

Sind diese Operatoren linear? Für alle obergenannten Operatoren finden Sie:

a. adjungierten Operatoren,

b. inversen Operatoren.

2. Impulsoperator: (20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Impulsoperator $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ ein selbstadjungierter Operator im L_2-Raum (der Raum der aus allen 2-fach integrierbaren Funktionen besteht) ist.

(b) Finden Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren des Impulsoperators.

3. Zweizustandssystem: (20 Punkte)

Ein Zwei-Zustands-System (oder auch Zwei-Niveau-System) in der Quantenmechanik ist ein einfaches, aber wichtiges Modellsystem. Das System kann sich nur in einem von zwei möglichen Zuständen $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ benannt, oder in einer Superposition dieser zwei Zustände befinden. Alle solche Systeme kann man mit der Hilfe von der Pauli-Operatoren (oder Pauli-Matrizen) beschreiben. Diese definiert man als

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte und die Eigenvektors der Pauli-Matrizen.

(b) Finden Sie den Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}_x$ in einem von der Eigenzuständen des Operators $\hat{\sigma}_z$.

(c) Drücken Sie die Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_z$ in der Basis der Eigenvektoren des Operators $\hat{\sigma}_x$ aus.