Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 6
Abgabe 06.12.2013

---

1. Vektoranalysis I (20 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{V} = 4y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + 2z\boldsymbol{e}_z$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_A d\boldsymbol{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V})$ über die Oberfläche der Hemisphäre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ mit $z \geq 0$.

2. Vektoranalysis II ($5 + 10 + 10 = 25$ Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{V} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{e}_x + 2xy\boldsymbol{e}_y$.

(a) Berechnen Sie $\nabla \times \boldsymbol{V}$.

(b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_A d\boldsymbol{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V})$ wobei die Fläche A ein Rechteck in der (x, y) Ebene darstellt, das begrenzt ist durch die Linien $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\oint_{C=\partial A} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V}$ entlang des Randes von A und zeigen Sie das Stokes' Theorem erfüllt ist.

3. Kabelrollen (20 Punkte)

Ein biegsames Kabel der Länge L und der Massendichte ρ (Einheit $[\rho] = kg/m$) hängt über einer Rolle, deren Masse, Radius und Reibung vernachlässigt werden können. Anfangs befindet sich das Kabel gerade im Gleichgewicht. Das Kabel wird leicht angestoßen, um es aus dem Gleichgewicht zu bringen, und es beschleunigt weiter.

Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt, an dem das Ende von der Rolle wegfliegt.

4. Geodäten der Ebene (15 Punkte)

Wir wollen die Euler-Lagrange Gleichungen, die wir in der Vorlesung kennengelernt haben verwenden, um die Geodäten in der zweidimensionalen (t, x)-Ebene zu bestimmen. Eine Geodäte ist dabei der Pfad zwischen gegebenen Punkten $(0, 0)$ und $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ mit der minimalen Länge.

Gehen Sie wiefolgt vor. Stellen Sie zuerst ein Integral auf, das minimiert werden soll. Es ist von der Form $S = \int_{t_1}^{t_2} dt f(x, \dot{x}, t)$. In der Vorlesung, haben wir gelernt, dass ein solches Integral von der Funktion $x(t)$ minimiert wird, die die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1}$$

erfüllt.

Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Geodätenproblem auf und lösen Sie die Gleichung.

5. Verlorene Ladung (20 Punkte)

Ein Wagen der Masse m_1 und Länge L wird von einem hängenden Teilchen der Masse m_2 gezogen. Der Wagen bewegt sich ohne Reibung über den Tisch. Auf dem Wagen befindet sich ein kleiner rechteckiger Stein der Masse m_3, der nach einer Zeit T nachdem der Wagen losgefahren ist, vom Wagen fällt.

Berechnen Sie den Koeffizienten der kinetischen Reibung μ zwischen dem Stein und dem Wagen.

Welchen Wert von μ erhalten Sie für $g = 10m/s^2$, $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 5$ kg, $L = 40$ cm, $m_3 = 2$ kg und $T = 0.8$ sec ?

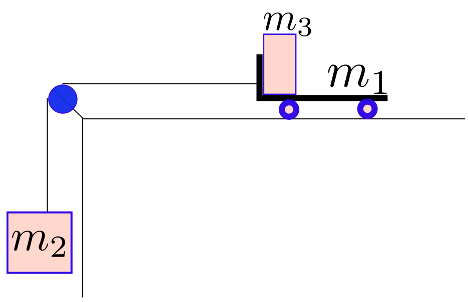

Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe 4.