Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 7
Abgabe 13.12.2013

---

1. Taylorentwicklung I (5 + 5 + 5 + 10 = 25 Punkte)

Berechnen Sie für alle folgenden Funktionen explizit die ersten vier nicht verschwindenden Terme der Taylorreihe um den Punkt $x = 0$, und finden Sie anhand Ihres Ergebnisses den allgemeinen Ausdruck der Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) $\sin(x)$, $\cos(x)$

(b) e^x, $\ln(1 + x)$

(c) $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Zeigen Sie dass man die Reihe sowohl erhalten kann durch Bilden der Ableitungen von $\tan(x)$ als auch durch Division der in Aufgabe 1 erhaltenen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(d) $1/(1+x)$, $\sqrt{1+x}$, $1/\sqrt{1+x}$, $(1+x)^p$ mit $p \in \mathbb{R}$. Hier ist es sinnvoll das allgemeine Ergebnis mit Hilfe der Binomialkoeffizienten

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}\,. \tag{1}$$

darzustellen. Es genügt offensichtlich die allgemeine Reihe für $(1 + x)^p$ anzugeben.

2. Taylorentwicklung II (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktionen in den Aufgabenteilen (a) und (b) jeweils die ersten drei nicht verschwindenden Terme der Taylorentwicklung um den Punkt $x = 0$:

(a) $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

(b) $1/\sqrt{\cos(x)}$ und $e^x/(1-x)$.

(c) Berechnen Sie die Grenzwerte der unendlichen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/n!$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$.

3. Vektoranalysis (15 Punkte)

Berechnen Sie

$$I = \int_A d\boldsymbol{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) \tag{2}$$

über den Teil der Fläche $z = 9 - x^2 - 9y^2$, der über der (x, y)-Ebene liege. Hier bezeichnet $z = f(x, y)$ eine Parametrisierung der zwei-dimensionalen Fläche, d.h. Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die dieser Gleichung genügen liegen auf der Fläche. Der Teil der Fläche mit $z > 0$ ist mit A bezeichnet. Das Vektorfeld ist gegeben als $\boldsymbol{V} = 2xy\boldsymbol{e}_x + (x^2 - 2x)\boldsymbol{e}_y - x^2z^2\boldsymbol{e}_z$.

4. Halber Looping (15 + 10 + 5 = 30 Punkte)

Ein kleines Objekt der Masse $m = 1$ kg wird aus der Höhe h auf einer schiefen Ebene losgelassen und gleitet ohne Reibung hinab. Die Rampe ist ohne Kanten mit der horizontalen Ladefläche eines Wagens der Masse M verbunden (siehe Abb.). Der Wagen besitzt in der Mitte eine halb-zylindrische Oberfläche mit Radius $R = 0.36$ m.

Das kleine Objekt erreicht den höchsten Punkt des Halbzylinders und stoppt dort. Von dort aus fällt es vertikal im freien Fall herunter und berührt schliesslich den Wagen *genau* an der Kante. Vernachlässigen Sie Reibung in diesem Problem.

(a) Was ist die minimale Länge L des Wagens ?

(b) Wie groß ist die Masse des Wagens M ?

(c) Aus welcher Höhe h über der Ladefläche wurde das kleine Objekt losgelassen ?

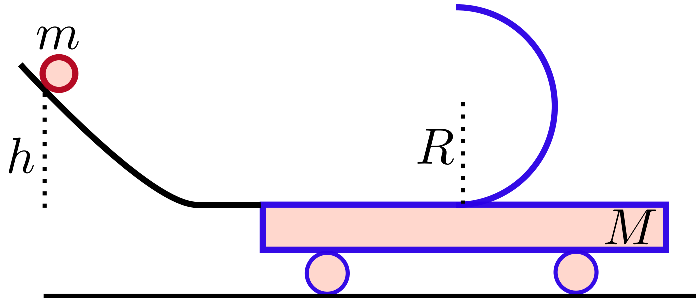

Abbildung 1: Abbildung zu Aufgabe 4.