Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 8
Abgabe 20.12.2013

---

1. Komplexe Zahlen (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 10 = 35 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in den drei Formen

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{1}$$

und zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene ein: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $z_4 = \frac{3+i}{2+i}$, $z_5 = i^4$.

(b) Finden Sie zu $z = x+iy$ jeweils $z_1 = z^{-1}$, $z_2 = 1/z^2$, $z_3 = z/z^*$, wobei $z^* \equiv \bar{z} = x-iy$ bezeichnet.

(c) Beschreiben Sie geometrisch die Menge von Zahlen, die jeweils folgenden Gleichungen genügen $|z| = 2$, $\mathrm{Re}(z^2) = 4$, $|z+1| + |z-1| = 8$, $z^2 = -(z^*)^2$.

(d) Zeigen Sie anhand der Potenzreihenentwicklung daß gilt $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ mit $z = x + iy$.

(e) Bestimmen Sie alle komplexen Wurzeln der folgenden Ausdrücke. Schreiben Sie die komplexe Zahl dazu in der Polorkoordinatenform $z = re^{i\theta}$ und ziehen Sie dann die Wurzel:

i) $\sqrt[4]{64}$, ii) $\sqrt[3]{-1}$, iii) $\sqrt[6]{-8i}$, iv) $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$, v) $\sqrt[5]{i}$.

(f) Der Logarithmus einer komplexen Zahl $z = re^{i\theta}$ ist definiert als $\ln z = \ln r + i\theta$. Da wir die gleiche Zahl erhalten falls sich θ um ein Vielfaches von 2π ändert, gibt es unendliche viele komplexe Logarithmen einer komplexen Zahl, die sich jeweils um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Man bezeichnen den Hauptwert des Logarithmus mit der Lösung bei der das Argument im Intervall $\theta \in (-\pi, \pi]$ liegt. Berechnen Sie

i) $\ln(-1)$, ii) i^{-2i}, iii) $i^{1/2}$, iv) $(1+i)^{1-i}$.

2. Differentialgleichungen (10 + 5 = 15 Punkte)

(a) Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

$$y'' + y' - 2y = 0 \tag{2}$$

$$y'' - 2y' = 0 \tag{3}$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,. \tag{4}$$

(b) Finden Sie sowohl die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der Differentialgleichung, d.h. ohne den inhomogenen Term auf der rechten Seite $c = 0$, als auch die spezielle Lösung $y_p(x)$ für $c \neq 0$:

$$y'' - 4y = c\,. \tag{5}$$

3. RLC Schaltkreis (5 + 15 + 10 = 30 Punkte)

Betrachten Sie den einfachen elektrischen Schaltkreis in Abb. 1. Er enthält den Widerstand R, die Kapazität C und die Indukivität L. Der Strom, der im Schaltkreis fließt sei $I(t)$ und die Ladung auf dem Kondensator $Q(t)$, wobei $\dot{Q}(t) = I(t)$. Die Spannung, die am Widerstand abfällt ist gegeben durch RI, die Spannung am Kondensator durch Q/C und die Spannung über der Spule durch $L\dot{I}$. Aufgrund des Kirchhoffschen Gesetzes gilt also zu jedem Zeitpunkt

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = V(t)\,, \tag{6}$$

wobei $V(t)$ die Spannung der externen Spannungsquelle bezeichnet. Differenzieren wir nach t erhalten wir

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}\,. \tag{7}$$

Betrachten Sie im Folgenden den RLC-Schaltkreis für $V = 0$.

(a) Bestimmmen Sie die Resonanzfrequenz ω_{LC} des Schaltkreises unter Vernachlässigung des Widerstands R.

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7) (für $V = 0$) in den drei Regimes: i) schwach gedämpfte (*engl.* underdamped), ii) kritisch gedämpfte (aperiodischer Grenzfall) (*engl.* critically damped) und iii) überdämpfte (Kriechfall) (*engl.* overdamped) Schwingungen.

Bestimmen Sie in welchem Regime sich der Schwingkreis befindet als Funktion der Parameter $\{L, C, R\}$.

(c) Für welche Parameter klingt der Strom am schnellsten in der Zeit ab ?

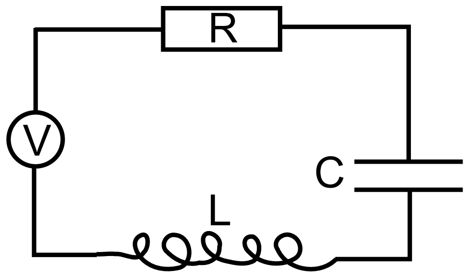

Abbildung 1: RLC-Schaltkreis

4. Bewegte Feder $(5 + 5 + 10 = 20$ Punkte$)$

Die Ruhelänge einer ungedehnten Feder mit Federkonstante $D = 80$ N/m sei $L_0 = 0.6$ m. Am unteren Ende der Feder ist eine kleine Masse $m = 2$ kg befestigt, die anfänglich auf dem Boden aufliegt. Das obere Ende der Feder wird vertikal über der Masse gehalten, so daß die Feder ungedehnt ist, d.h. das obere Ende befindet sich im Abstand L_0 über der kleinen Masse m.

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird das obere Ende der Feder mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0.5$ m/s vertikal nach oben bewegt.

(a) Welche Höhe hat die kleine Masse m nach $T = 1.75$ sec erreicht ?

(b) Welche Arbeit wurde bis zu dem Zeitpunkt T von der Kraft, die die Feder anhebt verrichtet ?

(c) Berechnen und beschreiben Sie die Leistung $P(t)$ als Funktion der Zeit.