Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 11, 100 Punkte
Abgabe 24.01.2014

---

1. Nicht so schnell (10 Punkte)

Ein kleiner „Star Wars“ Glücksbringer hängt an einer Feder im Fahrerhaus eines LKWs und verursacht in Ruhe eine Ausdehnung der Feder von $x_0 = 0.1$ m. Der Truck fahre nun auf einer etwas älteren Autobahn, die aus Platten der Länge $L = 20$ m besteht, die so aneinanderliegen, dass stets ein kleiner Spalt zwischen den Platten existiert, dessen Breite vernachlässigt werden kann. Wenn der LKW die Geschwindigkeit v besitzt, oszilliert der kleine „Star Wars“-Held mit maximaler Amplitude. Bestimmen Sie v.

2. Fensterputzer ($15 + 10 = 25$ Punkte)

Ein Fensterputzer mit einer Masse von 81 kg, der von einem Seemannsstuhl aus arbeitet (siehe Abb. 1), der an der Seite eines hohen Gebäudes herunterhängt, möchte sich schnell bewegen. Er zieht mit einer solchen Kraft an dem Fallseil nach unten, dass er nur mit einer Kraft von 450 N gegen den Stuhl drückt. Der Stuhl selbst hat eine Masse von 13.5 kg (rechnen Sie mit $g = 10$ m/s^2). Die Masse des Seils sowie Reibungskräfte können vernachlässigt werden.

(a) Wie groß ist die Beschleunigung des Malers und des Stuhls ?

(b) Wie groß ist die Gesamtkraft, die von der Seilrolle am oberen Ende gehalten wird ?

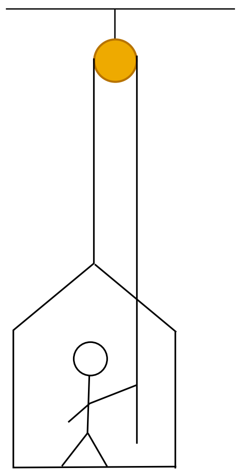

Abbildung 1: Fensterputzer im Seemannsstuhl.

3. Getriebener harmonischer Oszillator ($15 + 10 = 25$ Punkte)

Betrachten Sie den getriebenen harmonischen Oszillators im schwach gedämpften Fall $\gamma/2 < \omega_0$, beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos(\Omega t) \tag{1}$$

für den Resonanzfall, dem er mit $\Omega = \omega_0$ getrieben wird. Die Anfangsbedingungen seien $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, die aus homogener $x_h(t)$ und partikulärer Lösung $x_p(t)$ besteht, als Funktion von γ, f und ω_0 für die gegebenen Anfangsbedingungen an.

(b) Nehmen Sie nun an, dass $f = \sqrt{2}\omega_0^2$ und $\omega_0 = \sqrt{2}\gamma$. Berechnen Sie die homogene und die partikuläre Lösung für diesen Fall. Zeichnen Sie qualitativ die Auslenkungsfunktionen $x(t), x_h(t)$ sowie $x_p(t)$ als Funktion von γt für $\gamma t \in [0, 5]$ indem Sie die Funktionen für einige Punkte auswerten und eine Kurve durch diese Punkte legen. Sie dürfen natürlich auch einen Computer zum Zeichnen der Kurve verwenden.

4. Raketenstart (5 + 5 + 10 + 5 + 5 + 10 = 40 Punkte)

Betrachten Sie die Trajektorie einer Rakete, deren Gesamtmasse $M(t) = m_0 + m(t)$ sich aus einem zeitlich konstanten Teil m_0 und der zeitabhängigen Treibstoffmasse $m(t)$ zusammensetzt. Die Rakete stößt mit einer konstanten Rate $\dot{m} = -m_0/\tau$ einen Strom von heißem Gas mit einer zeitlich konstanten Relativgeschwindigkeit v_r (gemeint ist relativ zur Rakete) nach hinten aus. Der Rückstoß des Gases übt auf die Rakete eine Schubkraft aus. Alle anderen Kräfte können im Weltall fern aller größeren Himmelskörper vernachlässigt werden.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Rakete auf.

(b) Bestimmen Sie $m(t)$ aus $\dot{m} = -m_0/\tau$ mit Anfangsbedingung $m(0) = m_0$ durch Separation der Variablen, d.h. schreiben Sie die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(x)$ formal um in $\frac{dx}{f(x)} = dt$ und integrieren Sie beide Seiten um die Lösung zu erhalten $\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^{t} dt'$. Bringen Sie dann die Raketengleichung in die Form

$$\dot{v}(t) = \frac{v_r}{\kappa - t}\,, \tag{2}$$

wobei κ zu bestimmen ist.

(c) Bestimmen Sie $v(t)$ wiederum durch Separation der Variablen.

(d) Für $t \geq \tau$ bleibt $v(t)$ konstant in der Zeit, da der Treibstoff aus der Rakete ausgeströmt ist. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit $v(\tau)$.

(e) Berechnen Sie die Trajektorie der Rakete $x(t)$ mit $\dot{x}(t) = v(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

(f) Berechnen und interpretieren Sie das Verhalten von $x(t)$ und $v(t)$ für kurze Zeiten $t/\tau \ll 1$ indem Sie $x(t)$ und $v(t)$ in eine Taylorreihe bis zur niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung entwickeln.