Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 12, 100 Punkte
Abgabe 31.01.2014

---

1. Trajektorie in invertiertem Quadratpotential (20 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung besprochen, dass die Erhaltung der Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \tag{1}$$

mit $E \geq V(x)$ nach Separation der Variablen zur Integration der Bewegungsgleichung verwendet werden kann.

Berechnen Sie die Trajektorie $x(t)$ für das Potential $V(x) = -\frac{k}{2}x^2$ für die Anfangswerte $x(t=0) = 0$ und $v(t=0) = v_0$ und skizzieren Sie $x(t)$.

2. Wellenphasen (20 Punkte)

Eine Welle bewege sich entlang einer geraden Linie. Der Abstand zwischen zwei Punkten gleicher Phase sei $l_e = 5$ m, der Abstand zwischen zwei Punken entgegengesetzer Phase sei $l_o = 1.5$ m. Bestimmen Sie alle möglichen Wellenlängenwerte λ und skizzieren Sie die Lösung mit der längsten Wellenlänge. Fügen Sie dabei die Abstände l_e und l_o in Ihrer Skizze explizit ein.

3. Reelle Fourierreihen ($10 + 10 + 10 = 30$ Punkte)

Jede periodische Funktion $f(t)$ mit Periode $T > 0$ kann als Fourierreihe entwickelt werden

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\Big) \tag{2}$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)\cos(\omega n t) \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)\sin(\omega n t)\,. \tag{4}$$

Hier haben wir angenommen, dass die Funktion $f(t)$ im Intervall $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ definiert ist und von dort periodisch auf ganz $t \in \mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

Die genauen Konvergenzeigenschaften einer Fourierreihe wird durch den Satz von Dirichlet beschrieben: die reelle Funktion $f(t)$ sei periodisch mit Periode $T > 0$. Die Funktion sei im Intervall $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ injektiv, habe dort eine endliche Anzahl von Minima und Maxima sowie eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten. Falls das Integral $\int_{-T/2}^{T/2} dt|f(t)|$ endlich ist, dann konvergiert die Fourierreihe (2) punktweise gegen die Funktion $f(t)$ für alle Werte von t an denen $f(t)$ stetig ist. An den Unstetigkeitspunkten t_i konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelpunkt des Unstetigkeitssprungs $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}[f(t_i - \epsilon) + f(t_i + \epsilon)]$.

Die folgenden Funktionen sind auf einem endlichen Intervall definiert und seien periodisch für alle $t \in \mathbb{R}$ fortgesetzt. Skizzieren Sie die folgenen Funktionen über 3 periodische Intervalle und berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1\,, & -\pi < t < 0, \\ 0\,, & 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{5}$$

$$f_2(t) = 1 + t,\ -\pi < t < \pi\,. \tag{6}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0\,, & -\pi < t < 0, \\ \sin(t)\,, & 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{7}$$

4. Komplexe Fourierreihen (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Die komplexe Darstellung der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit Periode T lautet

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} \tag{8}$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-i\omega n t}\,. \tag{9}$$

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_n für die Funktionen

$$f_1(t) = \begin{cases} 1\,, & -\pi < t < 0, \\ 0\,, & 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{10}$$

$$f_4(t) = \begin{cases} 0\,, & -\pi < t < 0, \\ 1\,, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0\,, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} \tag{11}$$

(b) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $\{a_n, b_n\}$ und $\{c_n\}$. Drücken Sie dabei sowohl a_n und b_n durch c_n und c_{-n} aus als auch den inversen Zusammenhang, d.h. drücken Sie c_n und c_{-n} durch a_n und b_n aus.

Verifizieren Sie diesen Zusammenhang explizit für die Koeffizienten der Funktion $f_1(t)$, die Sie ja sowohl in ein komplexe als auch in eine reelle Fourierreihe entwickelt haben.

(c) Zeigen Sie dass im Falle einer reellen Funktion $f(t) \in \mathbb{R}$ die komplexen Fourierkoeffizienten die Relation $c_{-n} = c_n^*$ erfüllen.