Klassische Theoretische Physik III

Elektrodynamik

gehalten von Prof. Dr. Alexander Mirlin im WS 12/13, gehalten von Prof. Dr. Alexander Shnirman im WS 14/15

23. Februar 2015

geschrieben von Steffen Hahn im WS 12/13, überarbeitet von A. Shnirman im WS 14/15

Inhaltsverzeichnis

1	Elek	trostatik	5
	1.1	Das Coulomb-Gesetz	5
	1.2	Einheitensysteme	5
		1.2.1 SI-Einheitensystem	5
		1.2.2 Gauß-System	5
	1.3	Ladungsverteilung	6
	14	Gauß'sche Gesetz	6
		141 Integrale Form	6
		1.4.2 Differentielle Form	7
	15	Das Skalarnotontial	7
	1.0	Anwondung auf Bandbadingungan	0
	1.0 1.7	Deissen Cleichung und Lenlage Cleichung	0
	1.1	Folsson-Gleichung und Laplace-Gleichung	9
	1.8		10
	1.9		10
	1.10	Matrix der Kapazitaten	11
	1.11	Methode der Bildladungen/Spiegelladungen	11
		1.11.1 Geerdete, unendliche, metallische Platte	11
		1.11.2 Punktladung und geerdete metallische Kugel	12
		1.11.3 Punktladung und isolierte metallische Kugel	13
		1.11.4 Punktladung und metallische Kugel mit Potential Φ	13
	1.12	Formale Lösung des Randwertproblems	14
		1.12.1 Green'sche Identitäten	14
		1.12.2 Eindeutigkeit der Lösung	14
		1.12.3 Green'sche Funktion	14
	1.13	Entwicklung nach orthogonalen Funktionen	16
	1.14	Kartesische Koordinaten	17
	1.15	Kugelkoordinaten	18
	1.16	Multipolentwicklung (Kartesische Koordinaten)	20
	1.17	Multipolentwicklung (Kugel-Koordinaten)	21
	1 18	Energie im äußeren Feld	$\frac{-1}{22}$
	1.10		
2	Mag	netostatik	24
	2.1	Strom und die Kontinuitätsgleichung	24
		2.1.1 Biot Savart-Gesetz	24
	2.2	Magnetfeld im Gauß-System	25
	2.3	Kraft zwischen zwei parallelen Drähten	$\frac{-0}{25}$
	$\frac{2.0}{2.4}$	Allgemeine Formulierung des B-S-Gesetzes	26
	2.1 2.5	Feldgleichung Vektorpotential Ampere-Cesetz	26
	2.0	251 Integralform des Ampara Cosatzos	20
		2.5.1 Integration des Ampere-Gesetzes	21
	າເ	2.5.2 Randbednigungen	21
	2.0	Compresentation of Verhältnig	2ð 20
	2.1	Gyromagnetiscnes vernaltnis	30
	2.8	Krait und Drehmoment auf magnet. Moment im außeren Magnetfeld	30
	2.9	Faraday sches Induktionsgesetz	31
	2.10	Magnetische Energie	31
		2.10.1 Induktivitätskoeffizienten	32

		2.10.2 Gesamtenergie einer Anordnung der Stromschleifen
3	Max	well-Gleichungen, el./magn. Wellen, Strahlen 34
	3.1	Maxwell-Gleichungen
	3.2	Vektor- und Skalarpotential, Eichtransformation 38
		3.2.1 Eichfreiheit
	3.3	Energie- und Impulserhaltung, Poynting-Vektor
	3.4	Elektromagnetische Wellen 39
		3.4.1 1-D Lösungen der Wellengleichung 39
		3.4.2 Ebene Wellen in 3D
		3.4.3 Ebene el/mag Wellen 40
	3.5	Polarisation, lineare, zirkulare, elliptische
		3.5.1 Lineare Polarisation 4
		3.5.2 Elliptische Polarisation 41
	36	Energie-Dichte und -Fluß
	3.7	Hohlraumwellen: Hohlraumresonatoren und Wellenleiter
	0.1	3.7.1 Quadar Hohlraum
		2.7.2 Wollowleiter 44
	20	Granden and Structure and Structure Determination of the Struc
	3.8	Green sche Funktion der Weilengleichung, Retardierte Potentiale
	3.9	Strahlung
		3.9.1 Nahfeld
		3.9.2 Fernfeld
	3.10	Strahlungsleistung
	3.11	Multipolentwicklung
	3.12	Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)
		3.12.1 Kurze Dipolantenne 51
	3.13	Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung 52
		- I - H - BAR - I
4	Elek	trodynamik in Materie 54
4	Elek 4.1	trodynamik in Materie 54 Makroskopische Maxwell-Gleichungen 54
4	Elek 4.1 4.2	trodynamik in Materie 54 Makroskopische Maxwell-Gleichungen 54 Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität 57
4	Elek 4.1 4.2 4.3	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien58
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator59
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum60
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien584.5.1Dielektrikum im Kondensator584.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien584.5.1Dielektrikum im Kondensator584.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell63
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien584.5.1Dielektrikum im Kondensator584.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Model634.6.1Lorentz-Model63
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung64
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63A.8.1Intensitätsbeziehungen64
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8 4.9	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung634.8.1Intensitätsbeziehungen64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model64Elektromagnetische Wellen in Materie64Reflexion und Brechung654.8.1Intensitätsbeziehungen66Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70Elektromagnetische Wellen in Matellen71
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung634.8.1Intensitätsbeziehungen64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70Elektromagnetische Wellen in Metallen714.10.1Skin-Effekt72
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70Elektromagnetische Wellen in Metallen714.10.1Skin-Effekt724.10.2Plasma-Wellen72
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien594.5.1Dielektrikum im Kondensator594.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model644.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung664.8.1Intensitätsbeziehungen64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70Elektromagnetische Wellen in Matellen714.10.1Skin-Effekt724.10.2Plasma-Wellen72
5	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spe:	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen56Elektrostatik in Materialien564.5.1Dielektrikum im Kondensator564.5.2Punktladung und Dielektrikum664.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld664.6.1Lorentz-Model654.6.2Kausalität664.8.1Intensitätsbeziehungen66Reflexion und Brechung674.8.1Intensitätsbeziehungen67Elektromagnetische Wellen in Materie674.10.1Skin-Effekt774.10.2Plasma-Wellen77zielle Relativitätstheorie, kovariante Formulierung der ED78
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spe: 5.1	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen56Elektrostatik in Materialien564.5.1 Dielektrikum im Kondensator564.5.2 Punktladung und Dielektrikum604.5.3 Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell624.6.1 Lorentz-Model634.6.2 Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Brechung und Brechung644.8.1 Intensitätsbeziehungen64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums70Elektromagnetische Wellen in Metallen714.10.1 Skin-Effekt724.10.2 Plasma-Wellen74Einstein'sches Relativitätsprinzip74
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spe: 5.1 5.2	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz55Randbedingungen56Elektrostatik in Materialien564.5.1 Dielektrikum im Kondensator564.5.2 Punktladung und Dielektrikum604.5.3 Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Model634.6.1 Lorentz-Model634.6.2 Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie66Reflexion und Brechung674.8.1 Intensitätsbeziehungen67Hektromagnetische Wellen in Metallen714.10.1 Skin-Effekt724.10.2 Plasma-Wellen73Einstein'sches Relativitätsprinzip74Lorentz-Transformation76
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spez 5.1 5.2	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien564.5.1Dielektrikum im Kondensator564.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model634.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie63Reflexion und Brechung64Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums77Elektromagnetische Wellen in Metallen774.10.1Skin-Effekt774.10.2Plasma-Wellen76Lorentz-Transformation765.2.1Raum- und zeitartige Abstände76
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spe: 5.1 5.2	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität55Energiebilanz57Randbedingungen58Elektrostatik in Materialien56Lektrostatik in Materialien564.5.1Dielektrikum im Kondensator564.5.2Punktladung und Dielektrikum664.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld61Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell634.6.1Lorentz-Model644.6.2Kausalität64Elektromagnetische Wellen in Materie66Reflexion und Brechung66A.8.1Intensitätsbeziehungen66Hettromagnetische Wellen in Metallen714.10.1Skin-Effekt724.10.2Plasma-Wellen73Lorentz-Transformation765.2.2Transformation765.2.2Transformation der Greschwindigkeit76
4	Elek 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9 4.10 Spe: 5.1 5.2 5.3	trodynamik in Materie54Makroskopische Maxwell-Gleichungen54Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität57Randbedingungen56Elektrostatik in Materialien56Lektrostatik in Materialien564.5.1Dielektrikum im Kondensator564.5.2Punktladung und Dielektrikum604.5.3Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld664.6.1Lorentz-Model664.6.2Kausalität664.6.1Lorentz-Model664.6.2Kausalität664.8.1Intensitätsbeziehungen664.8.1Intensitätsbeziehungen674.8.1Intensitätsbeziehungen77Elektromagnetische Wellen in Materie774.10.1Skin-Effekt774.10.2Plasma-Wellen765.2.1Raum- und zeitartige Abstände765.2.2Transformation765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.1Kaum- und zeitartige Abstände765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.2Transformation der Geschwindigkeit775.2.1Kaum- und zeitartige Abstände765.2.2Transformation der Geschwindigkeit765.2.2Transformati

5.4	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	84
5.5	El/mag. Feldtensor, Maxwell-Gl für E- und B-Feld in kov. Form	85
5.6	Lorentz-Transformationen der elektromagnetischen Felder	86
5.7	Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung	87
5.8	Beschleunigte Ladungen, Liénard-Wichert-Potential, Strahlung	88
5.9	Dopplereffekt	88
	5.9.1 Nichtrelativistischer Fall (Schallwellen)	88
	5.9.2 Relativistischer Fall, E.M. Wellen	88

1 Elektrostatik

1.1 Das Coulomb-Gesetz

Ladungen wirken aufeinander Kräfte aus. Die Kraft auf eine Ladung q_1 erzeugt von einer anderen Ladung q_2 kann über das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = kq_1q_2 \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3} \tag{1.1}$$

beschrieben werden. Das elektrische Feld \vec{E} einer Ladung q_i ist die Kraft pro Ladungseinheit der Probeladung q. Das führt über Gleichung (1.1) auf

$$\vec{F} = q\vec{E} \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = kq_i \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}.$$
(1.2)

1.2 Einheitensysteme

Im Allgemeinen gibt es zwei wichtige Einheitensysteme in denen Probleme der Elektrodynamik gelöst werden. Das von der theoretischen Physik präferierte ist das Gauß-System, das international akzeptierte das SI-Einheitensystem.

1.2.1 SI-Einheitensystem

Das ~ baut auf den Basiseinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde auf. Die Stromstärke ist eine definierte Basiseinheit und gibt an wie viel Ladung pro Sekunde fließt. Der Proportionalitätsfaktor k des Coulomb-Gesetzes ist definiert als

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} := 10^{-7} c^2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \quad \text{mit Lichtsgeschwindigkeit} \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$
 (1.3)

Das ergibt

$$\epsilon_0 \approx 8,864 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}.$$
 (1.4)

Die Elektron-Ladung im SI-System beträgt $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

1.2.2 Gauß-System

Das ~ baut auf den Basiseinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde auf. Der Proportionalitätsfaktor k ist auf den einheitenlosen Wert 1 gesetzt. Die Ladung besitzt die Einheit ESE (Elektrostatische Einheiten). Sie wird im englischen "esu" teilweise auch 1 Fr (Franklin), 1 statC (static Coulomb) genannt. Die Kraft wird in "dyn" angegeben, dabei entspricht

$$1 \,\mathrm{dyn} = 1 \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 1 \frac{\mathrm{ESE}^2}{\mathrm{cm}^2}$$
 (1.5)

und ESE besitzt die Einheit

$$1 \text{ ESE} = 1 \frac{\text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}}}{\text{s}} \quad \text{mit} \quad e \approx 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ ESE.}$$
(1.6)



Abbildung 1.1: Eine Punktladung in einer geschlossenen Oberfläche

Es ist zu beachten, dass die zwei Systeme von unterschiedlichen Standpunkten ausgehen. Man soll nie die beiden Systeme gleichzeitlich (z.B. in einer Gleichung) benutzten.

1.3 Ladungsverteilung

Eine Ladungsverteilung lässt sich leicht über

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$
(1.7)

darstellen. Bei einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ können wir in eine Integralform wechseln:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$
(1.8)

Die Ladungsdichte setzt sich dabei aus allen Ladungen zusammen, wobei

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$
(1.9)

für die Dichte geschrieben werden kann. Dabei ist δ die Dirac-Delta-Distribution bei der es sich um eine "verallgemeinerte Funktion" handelt. Für diese gilt

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}x \ \delta(x - x_{0}) = \begin{cases} 1 & a < x_{0} < b \\ 0 & x_{0} < a \text{ oder } b < x_{0} \end{cases}$$
(1.10)

und

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \ f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0).$$
(1.11)

Die Dirac-Distribution ist auch im Mehrdimensionalen definiert. Hier wird sie oft in Dichten, wie oben in Gleichung (1.9) benutzt. Sie lässt sich schreiben als

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{1.12}$$

1.4 Gauß'sche Gesetz

1.4.1 Integrale Form

Wir betrachten eine Ladung die von einer beliebigen Fläche S umschlossen wird, die den Normalenvektor $\vec{n}(\vec{r})$ hat. Siehe Abb. 1.1. Es gilt



Abbildung 1.2: Zum mathematischen Satz von Gauß

$$\vec{E} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega \tag{1.13}$$

wobei $d\Omega$ ein Raumwinkel-Element ist. Der Raumwinkel-Element ist definiert als $d\Omega = dS'/r^2$. Hier ist $dS' = dS \cos \theta$ die Fläche der Projektion des Oberfächenelements dS die senkrecht zu $\vec{r} \parallel \vec{E}$ ist. Falls die Ladung innerhalb der Fläche liegt muss das gerichtete Oberflächenintegral über die el. Feldstärke

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{1.14}$$

24.10.2014

sein. Daraus kann man folgern, wenn alle Ladungen sich innerhalb befinden, dass

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_{0}} \sum_{i} q_{i} \Rightarrow \oint_{S} \vec{E} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_{0}} \int_{V(S)} \mathrm{d}^{3}r \; \rho(\vec{r}). \tag{1.15}$$

1.4.2 Differentielle Form

Mathematischer Satz von Gauß: für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{\mathbf{v}}(\vec{r})$ gilt (siehe Abb. 1.2)

$$\int_{V(S)} dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} \right) = \int_{S} dS \left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right)$$
(1.16)

Wir ersetzen $\vec{\mathbf{v}}$ mit $\vec{\mathbf{E}}$ und erhalten

$$\int_{V(S)} dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} \right) = \int_{S} dS \left(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} dV \rho$$
(1.17)

Da wir das Volumen V(S) beliebig klein wählen können erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.18}$$

1.5 Das Skalarpotential

Aus dem Zusammenhang

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1.19}$$

erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int d^3 r' \,\rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} =: -\nabla\Phi \tag{1.20}$$



Abbildung 1.3: Zur Herleitung der Randbedingungen

Hier wurde das Skalar
potential Φ definiert

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{1.21}$$

Für Punktladungen ergibt das

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}.$$
(1.22)

Daraus folgt, dass die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla \Phi) = 0. \tag{1.23}$$

Das Potential des elektrischen Feldes drückt aus, welche Arbeit pro Ladung nötig ist, um eine Ladung von einem Ort zu einen anderen Ort zu bewegen. Dabei ist zu beachten, das es sich beim E-Feld in diesem Fall um ein konservatives Feld handelt: Daher gilt auch Wegunabhängigkeit zwischen zwei Punkten mit unterschiedlichem Potential und zudem für die elektrische Ene

$$W = -\int_{A}^{B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -q \int_{A}^{B} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = q \int_{A}^{B} \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{\mathbf{l}} = q(\Phi_{B} - \Phi_{A}).$$
(1.24)

Dieses Integral ist unabhängig vom Pfad zwischen den Punkten A und B. Das folgt vom Satz von Stokes, dass für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{\mathbf{v}}$ besagt, dass ein Linien-Integral von $\vec{\mathbf{v}}$ über eine geschlossene Kontour γ ist gleich dem Fluss der Rotation von $\vec{\mathbf{v}}$ durch die Oberfläche der Kontour:

$$\oint_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \int_{S(\gamma)} dS \, \vec{\mathbf{n}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}}) \tag{1.25}$$

Mit $\vec{\mathbf{v}} \rightarrow \vec{E}$ und $\nabla \times \vec{E} = 0$ erhalten wir

$$\int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0 \tag{1.26}$$

Also \vec{E} ist ein konservatives Feld und wir definieren die potentielle Energie $U(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r})$.

1.6 Anwendung auf Randbedingungen

Es sei $\sigma(\vec{r})$ die Flächenladungsdichte. Wir betrachten ein infinitesimales Oberflächenelement und wenden darauf das Gauß'sche Gesetz an indem wir eine Art Kasten so darum legen, das dessen beiden Deckflächen parallel zur Oberfläche liegen (Abb. 1.3 (links)). Danach lassen wir, wie gewohnt, den Abstand zwischen beiden Flächen gegen 0 gehen und kommen so auf

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{2,\perp} - E_{1,\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$
(1.27)

Daraus folgt, dass die Senkrechtkomponente des E-Feldes nicht stetig bei Übergang zwischen zwei Materialien ist. Nun betrachten wir eine geschlossene Kurve in Form eines Rechtecks, die so an der Randfläche liegt, dass sie zur Hälfte darin und zur Hälfte draußen verläuft und orthogonal zur Oberfläche ist (Abb. 1.3 (rechts)). Wir lassen den Abstand zwischen Randkurve die innen und außen geht gegen 0 gehen und kommen so darauf

$$\oint_{C} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{2,\parallel} - E_{1,\parallel} = 0.$$
(1.28)

Daraus folgt, dass die Parallelkomponente des E-Feldes stetig ist.

Wir zeigen jetzt, dass das Skalarpotential stetig ist. Wir betrachten zwei Orte A und B die auf verschiedenen Seiten der Oberfläche liegen und sehr nah zur Oberfläche sind. Dann gilt $\Phi_B - \Phi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Da das elektrische Feld endlich ist, verschwindet das Integral wenn der Abstand zwischen A und B gegen null geht. Das bereutet die Randbedingung lautet $\Phi_A = \Phi_B$.

1.7 Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

Die Poisson-Gleichung folgt aus der Überlegung

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\nabla \Phi \Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$
 (1.29)

Die Laplace-Gleichung findet sich dann, wenn keine Ladungsdichte herrscht. Sie kann als $\Delta \Phi = 0$ ausgedrückt werden. Denn

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{1.30}$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung ist es ergibt sich die folgende wichtige Relation

$$-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \;\rho(\vec{r}\,') \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \text{ also } \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{1.31}$$

1.8 Elektrostatische Energie

Es seien n-1 Punktladungen gegeben. Wie groß ist jetzt die Arbeit eine weitere Punktladung aus dem unendlichen an die Position r_n zu bringen?

$$W_n = q_n \Phi(\vec{r}_n) \Rightarrow \Phi(\vec{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|}.$$
 (1.32)

Die gesamte Potentielle Energie des Systems liegt bei

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j(1.33)$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt

$$W^{\text{kont}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$$
(1.34)

$$= \frac{-\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3 r \; \Phi(\vec{r}) \nabla^2 \Phi(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3 r \; \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \tag{1.35}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3 r \; |\vec{E}|^2 \Rightarrow w(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \quad \text{Energiedichte} \tag{1.36}$$

Da die Integration im Unendlichen liegt fällt dabei der integrierte Term nach dem Satz von Gauß beim Anwenden der partiellen Integration weg. Man erhält einen scheinbaren Widerspruch 29.10.2014



Abbildung 1.4: Elektrisches Feld auf Metalloberfläche

$$W^{\text{kont}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3 r \ |\vec{E}|^2 > 0$$
 (1.37)

ist immer positiv. Jedoch können bei der kontinuierlichen Ladungsverteilung in Gleichung (1.33) auch negative Werte herauskommen. Das Paradoxon löst sich auf, da in W^{kont} über alle q_i und q_j integriert wird, auch wenn sie gleich sind! Man sollte deshalb eher auf die anfängliche Ladungsverteilung zurückgreifen.

1.9 Randwertprobleme

Die einfachste Situation in der Elektrostatik ist wenn die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist im gesamten Raum gegeben. Dann gilt

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1.38}$$

und das elektrische Feld ergibt sich aus $\vec{E} = -\nabla \Phi$. Damit ist das Problem gelöst.

Eine andere Situation tritt auf wenn die Ladungsdichte nicht im gesamten Raum gegeben ist. Das ist so wenn es, z.B., Metalle im Raum gibt. In Metallen gilt immer im Inneren $\vec{E} = 0$ und $\Phi = \text{const}$, da es sonst zur internen Ladungsverschiebung kommen würde. Wohingegen an der Oberfläche treten induzierte Ladungen auf. Das Elektrische Feld ist dabei immer senkrecht zur Oberfläche, (siehe Abb. 1.4). Es gilt $E_{\perp}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\vec{r})$, wobei $\sigma(\vec{r})$ die Ladungsdichte auf der Oberfläche ist. Die Ladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ ist nicht bekannt und muss bestimmt werden. Man kann zwei typische Situationen betrachten: 1) das Skalarpotential von jedem Metallstück Φ_i ist bekannt. Das ist so wenn, z.B., die Metalle geerdet sind oder die Metalloberfläche an eine Batterie angeschlossen, deren anderer Pol geerdet ist (siehe Abb. 1.5 (linke Seite)); 2) die gesamte Ladung von jedem Metallstück ist Q_i ist gegeben (siehe Abb. 1.5 (rechte Seite)). Diese Situation tritt auf wenn das Metallstück isoliert ist. Obwohl $Q_i = \int_{S_i} dS \, \sigma(\vec{r})$, die \vec{r} -Abhängigkeit von $\sigma(\vec{r})$ ist nicht bekannt.

1) Im ersten Fall soll man die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \tag{1.39}$$

im äusserem Raum der Metalle lösen (wo die Ladungsdichte ρ gegeben ist) mit den Randbedingungen $\Phi(\vec{r}) = \Phi_i$ für $\vec{r} \in S_i$. Diese Randbedingung nennt man Dirichlet-Randbedingung. 2) Im zweiten Fall der Algorithmus ist wie folgt:

- 1. löse mit beliebigen Φ_i
- 2. finde Ladungsdichten auf den Oberflächen $\sigma[\Phi_i]$
- 3. bestimme $Q_i = \int dS_i \sigma$



Abbildung 1.5: Linke Seite: Die Potentiale Φ_i sind gegeben. Rechte Seite: Die gesamte Ladungen Q_i sind gegeben.

4. falls Q_i falsch ist korrigiere Φ_i und versuche noch mal

Eine weitere Randbedingung ist die Neumann-Randbedingung. In diesem Fall $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r}) = \nabla \Phi \cdot \vec{n}$ ist gegeben auf der Oberfläche.

1.10 Matrix der Kapazitäten

Wir betrachten *n* Leiter im sonst leeren Raum. Wir nehmen an alle Potentiale Φ_i seien angegeben (Abb. 1.5 (linke Seite)). Wie sieht nun die Relation von Gesamtladungen Q_i und Potentialen Φ_j aus? Denn die Poisson-Gleichung ist linear, die Relation muss auch linear sein:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \Phi_j, \text{ mit } C_{ij}\text{-Kapazitätskoeffizient (Matrix der Kapazitäten)}.$$
(1.40)

Jetzt nehmen wir an die Leiter seien isoliert (Abb. 1.5 (rechte Seite)). Wir kennen jetzt die Potentiale nicht, aber die Ladungen. Daher müssen wir die Relation invertieren

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n (C^{-1})_{ij} Q_j.$$
(1.41)

Über die Formel der elektrostatische Energie gilt darüber hinaus

$$\frac{1}{2} \int d^3 r \ \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (C^{-1})_{ij} Q_j Q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j.$$
(1.42)

1.11 Methode der Bildladungen/Spiegelladungen

1.11.1 Geerdete, unendliche, metallische Platte

Wir betrachten eine unendliche, metallische Platte, die geerdet ist. Wir nehmen an ihr Potential sei 0. Nun denken wir uns eine Ladung q im Abstand a in x-Richtung von der Platte (Abb. 1.6 (linke Seite)), d.h., im Ort $\vec{r_1} = (a, 0, 0)$. Wir können dieses Problem sehr einfach lösen durch eine Konstruktion die in Abb. 1.6 (rechte Seite) gezeigt wird. Wir spiegeln die Ladung an der Platte und erhalten so eine "imaginäre" Ladung -q im Ort $\vec{r_2} = (-a, 0, 0)$. Nun betrachten wir das Potential beider Ladungen. Dieses Potential interessiert uns nur für x > 0.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_1}|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} \right].$$
(1.43)



Abbildung 1.6: Spiegelladung

Die Poisson-Gleichung ist offensichtlich erfüllt für x > 0:

$$\nabla^2 \Phi \big|_{x>0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \left[\delta(\vec{r} - \vec{r_1}) - \underbrace{\delta(\vec{r} - \vec{r_2})}_{=0} \right].$$
(1.44)

Die Randwertbedingung ist damit auch erfüllt, da genau in der Mitte das Potential der Platte immernoch 0 sein muss. Über das berechnete Potential können wir das Elektrische Feld bestimmen

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r_1}}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r_2}}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3} \right].$$
(1.45)

Die Oberflächenladungsdichte (x = 0) ist dabei

$$\sigma(y,z) = \frac{-qa}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{-qa}{2\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
(1.46)

Die Dichte ist nur vom Abstand des Lotpunktes von q abhängig. Die Gesamtladung auf der Metallplatte (Influenzladung) ergibt sich als

$$q_{\text{infl}} = 2\pi \int \mathrm{d}R \ R \cdot \sigma(R) = -q. \tag{1.47}$$

was zu erwarten war. Physikalische existiert die Spiegelladung nicht, aber sie vereinfacht die Rechnung mit der induzierten Ladung für das Potential in der Halbebene, wo die ursprüngliche Ladung sitzt. Für die Kraft auf die reelle Punktladung gilt

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}', \text{ mit } \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}$$
 (1.48)

Daraus ergibt sich direkt

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} (-\vec{e}_x)$$
(1.49)

und damit eine Anziehung zwischen Ladung und Platte. Diese Methode funktioniert nicht bei beliebigen Oberflächen. Es funktioniert nur für einfache Situationen.

1.11.2 Punktladung und geerdete metallische Kugel

Wir betrachten eine Kugel mit dem Potential $\Phi = 0$ und Radius R (siehe Abb. 1.7 a)). Eine Punktladung q sitzt auf der z-Achse, die durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Wir wollen das Potential ausserhalb der Kugel berechnen.



Abbildung 1.7: Bildladungen für Kugel: a) geerdete Kugel; b) isolierte Kugel.

Wir benutzen wieder die Methode der Spiegelladungen. Diesmal ist es nicht trivial, da wir nicht direkt die Position von der Spiegelladung und deren Ladung wissen. Die Punktladung sitzt bei $\vec{r}_1 = (0, 0, a), a > R$, die Spiegelladung auf der unbekannten Position $\vec{r}_2 = (0, 0, b), b < R$. Daher prüfen wir wieder die Poisson-Gleichung. Das Potential wird die Form

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_1}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} \right]$$
(1.50)

haben. Wir nehmen einen beliebigen Punkt R auf der Kugeloberfläche

$$\Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} \right] = 0.$$
(1.51)

Das ergibt

$$\frac{q}{a\sqrt{(R/a)^2 + 1 - 2(R/a)\cos\theta}} + \frac{q'}{R\sqrt{1 + (b/R)^2 - 2(b/R)\cos\theta}} = 0$$
(1.52)

Als Lösung ergibt sich damit $q' = \frac{-Rq}{a}$ und $b = \frac{R^2}{a}$.

1.11.3 Punktladung und isolierte metallische Kugel

Siehe Abb. 1.7 b. Die Punktladung liegt auf derselben Position. Wir suchen wieder die Bildladung, die irgendwo auf der z - Achse in der oberen Halbkugel liegt. Wir benutzen dieselben Gleichungen wie im geerdeten Fall für die erste Bildladung. Zudem existiert eine weitere Bildladung, wie bei einer aufgeladen Kugel, die wir in der Mitte annehmen können.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_1}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} + \frac{q''}{|\vec{r}|} \right], \text{ mit } q'' = Q - q'$$
(1.53)

1.11.4 Punktladung und metallische Kugel mit Potential Φ

Diesmal ist die Kugel nicht isoliert (es hängt eine geerdete Batterie dran). Die Lösung ist in dem Fall identisch zum letzten Fall. Jedoch muss q'' so gewählt werden, damit das Potential am Rand korrekt ist.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R} \Rightarrow q'' = 4\pi\epsilon_0 R \Phi \quad , \quad Q = q' + q'' \tag{1.54}$$

1.12 Formale Lösung des Randwertproblems

1.12.1 Green'sche Identitäten

Wir betrachten ein Volumen V,welches durch eine OberflächeS begrenzt wird. Wir benutzen den Satz von Gauß

$$\int_{V(S)} dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} \right) = \int_{S} dS \left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right)$$
(1.55)

In unserem speziellen Fall wählen wir $\vec{\mathbf{v}} = \phi \nabla \psi$ und damit $\nabla \vec{\mathbf{v}} = \nabla \phi \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$. Damit gilt

$$\oint dS \ \phi \nabla \psi \cdot \vec{n} = \int d^3r \ \left(\nabla \phi \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi \right) = \oint dS \ \phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}.$$
(1.56)

(Hier benutzen wir die Abkürzung $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \equiv (\vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{n}$.) Dies wird erste Greensche Identität genannt. Die Zweite greensche Identität erhalten wir direkt durch $\phi \leftrightarrow \psi$ und Subtraktion

$$\oint dS \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right) = \int d^3r \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right).$$
(1.57)

Mit diesen beiden Hilfsmittel betrachten wir weiter das Randwertproblem $\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ mit Dirichlet oder Neumann Randbedingungen.

1.12.2 Eindeutigkeit der Lösung

Wir beweisen erst die Eindeutlichkeit der Lösung des Randwertproblems. Zunächst, nehmen wir an, dass es zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 gibt. Dann $U(\vec{r}) = \Phi_1 - \Phi_2$, genügt der Laplace-Gleichung $\nabla^2 U = 0$ mit Null-Randbedingungen, z.B. $U(\vec{r} \in S_i) = 0$ für Dirichlet oder $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} U|_{\vec{r} \in S_i} = 0$ für Neumann. Über die erste Greensche Identität folgt mit $\phi = \psi = U$

$$\int d^3r \left(\nabla U \nabla U + U \underbrace{\nabla^2 U}_{=0}\right) = \oint dS \ U \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0 \tag{1.58}$$

Daraus gilt $\vec{\nabla}U = 0$. Mit den Dirichlet-Randbedingungen erhalten wir U = 0. D.h. die Lösung ist eindeutig.

1.12.3 Green'sche Funktion

Wir definieren eine Green'sche Funktion als Lösung der folgenden Gleichung

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$
(1.59)

Es wäre auch äquivalent bei der Ableitung nach r', d.h., $\nabla_{r'}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Die 4π sind ein Normierungsfaktor. Eine Lösung dieser Gleichung sieht beispielsweise folgendermaßen aus

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{mit} \quad \nabla_r^2 F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \tag{1.60}$$

Betrachten wir eine der möglichen Lösungen für G. Wir benutzen die zweite Green'sche Identität

$$\oint dS \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right) = \int d^3r \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right).$$
(1.61)

mit $\phi(\vec{r}') = \Phi(\vec{r}')$ und $\psi(\vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}')$. Als Oberfläche S nehmen wir die sämtlichen Oberflächen der Leiter und die "Oberfläche" im Unendlichen. Als Volumen nehmen wir das gesamte Volumen

zwischen den Leiter. Das ergibt

$$\int_{S} dS' \left(\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial \vec{n}'} \right)$$

$$= \int_{V(S)} dV' \left[\Phi(\vec{r}') \Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta_{r'} \Phi(\vec{r}') \right]$$

$$= \int_{V(S)} dV' \left[\Phi(\vec{r}') (-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')) - G(\vec{r}, \vec{r}') \left(-\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) \right]$$
(1.62)

und weiter durch die Integration der Delta-Funktion auf der rechten Seite in Gl. (1.62)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V(S)} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \left(\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right)$$
(1.63)

Für das Dirichlet-Problem wäre es nett eine Green'sche Funktion zu finden, sodass

$$G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in S} = 0 = G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r} \in S}$$
(1.64)

Dann würden wir die folgende Relation erhalten

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V(S)} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$
(1.65)

Diese Relation erlaubt uns das Potential Φ zu bestimmen, wenn wir die Ladungsdichte ρ und die Dirichlet-Randbedingungen haben. Damit ist das Problem gelöst.

Eine weitere Frage ist, was wir für einen Leiter im Unendlichen Verlangen sollen. Das Potential ist bekannt

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \text{ mit } G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{1.66}$$

Daraus folgt direkt die Dirichlet-Randbedingung im Unendlichen.

$$G(\vec{r},\vec{r}') \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$
 (1.67)

Physikalische Interpretation: $G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$ mit einer Punktladung $4\pi\epsilon_0$ im Ort \vec{r}' , d.h., $\rho(\vec{r}) = 4\pi\epsilon_0\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ und den geerdeten Leitern, sodass auf allen Oberflächen gilt $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r} \in S$. Für das Spiegelladung-Problem mit der Metall-Platte in der x = 0 Ebene (oder äquivalent ein leitender Halbraum $x \leq 0$) erhalten wir für $\vec{r} = (x > 0, y, z)$ und $\vec{r}' = (x' > 0, y', z')$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}''|} , \qquad (1.68)$$

wobei $\vec{r}'' = (-x', y', z')$ der Ort der "Spiegellading" zu einer Ladung im \vec{r}' ist.

1.13 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

07.11.2014 Wir betrachten zuerst 1-Dimensionale Funktionen, dh. g(x) mit $x \in [a, b]$. Das Skalarprodukt $(h,g) = \int_a^b dx \ h^*(x)g(x)$. Im Fall von (g,h) = 0 heißt dies die Funktionen sind Orthogonal. Im Fall von (g,g) = 1 ist die Funktion normiert. Für eine Reihe von Funktionen (mit f_n), die unendlich ist, sodass $(f_m, f_n) = \delta_{mn}$ gilt und damit orthonomiert ist. Die Vollständigkeit bedeutet, für eine beliebige quadratintegrable Funktion g(x) gilt

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad , \quad a_n = (f_n, g), \tag{1.69}$$

wenn

$$\int \mathrm{d}x \, \left| g - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) \right| \to 0.$$
(1.70)

erfüllt wird. Wir schreiben q(x) als eine Summe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x' \ g(x') \cdot f_n^*(x') f_n(x) = \int \mathrm{d}x' \ g(x') \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x) = \int \mathrm{d}x' \ g(x') \delta(x'-x).$$
(1.71)

Daraus folgt die Vollständigkeitsrelation $\sum_n f_n^*(x')f_n(x) = \delta(x - x')$ Ein bekanntes Beispiel für ein vollständiges Orthonormalsystem ist die Fourierreihe im Intervall $x \in [-L/2, L/2]$. Für diese gilt

$$\{f_n\} = \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{\sin \frac{2\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{4\pi x}{L} \dots}_{\sin \frac{2m\pi x}{L}, \cos \frac{2m\pi x}{L}} \right\}.$$
 (1.72)

Man kann sie jedoch auch über die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\{f_n\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{L}} e^{i2\pi nx/L}\right\}.$$
(1.73)

Damit gilt

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i2\pi mx/L} \quad \text{mit} \quad a_m = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \ g(x) e^{-i2\pi mx/L}.$$
(1.74)

Bemerkung: Für $L \to \infty$ wird die Fourierreihe zum Fourierintegral, da die "Abstände" immer kleiner werden. Es gilt dann $\frac{2\pi m}{L} \to k$, $\sum_m \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ und $a_m = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} a(k)$ und damit:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \quad \text{mit} \quad a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x.$$
(1.75)

Die Orthonomierung ist über

$$\frac{1}{2\pi} \int dx \, e^{i(k-k')x} = \delta(k-k') \tag{1.76}$$

und die Vollständigkeit über

$$\frac{1}{2\pi} \int dk \, e^{i(x-x')k} = \delta(x-x') \tag{1.77}$$

erfüllt.

1.14 Kartesische Koordinaten

Über den Seperationsansatz können wir versuchen eine Allgemeine Vorschrift für die Lösung der Laplace-Gleichung zu finden. Wir setzen Φ als ein Produkt aus drei voneinander, unabhängigen Funktionen A(x), B(y) und C(z) an und setzen in

$$\nabla^2 \Phi \Rightarrow \partial_x^2 \Phi + \partial_y^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi = 0, \qquad (1.78)$$

ein. Danach dividieren wird durch Φ . Es folgt

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\mathrm{d}^2 A(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{B(y)}\frac{\mathrm{d}^2 B(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{C(z)}\frac{\mathrm{d}^2 C(z)}{\mathrm{d}z^2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$
(1.79)

Daraus folgt, dass alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung Konstanten seien müssen, wir nennen die Konstanten α^2 , β^2 und γ^2 . Daraus können wir drei Differentialgleichungen aufstellen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 A(x)}{\mathrm{d}x^2} = \alpha^2 A(x) \Rightarrow A(x) = a_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + a_2 \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$
(1.80)

Analog gilt dies für die anderen Funktionen B und C. Wir betrachten einen Quader im Ursprung mit der Länge a in x-Richtung, der Länge b in y-Richtung und der Länge c in z-Richtung. Jetzt suchen wir das Potential innerhalb des Quaders, unter der Randbedingung, dass dieses auf 5 Seitenflächen 0 ist. Auf dem Deckel bei z = c wird das Potential als $\Phi = V(x, y)$ angesetzt. Es muss also gelten $A(x = 0) = 0 \Rightarrow A(x) \propto e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} \propto \sinh \alpha x$. Dies gilt analog für die anderen Funktionen. Daraus folgt

$$A(x=a) = 0 \Rightarrow \sinh \alpha a \Rightarrow \alpha_n = i\frac{n\pi}{a} \Rightarrow A(x) \propto \sin \frac{n\pi}{a} x$$
(1.81)

$$B(y=b) = 0 \Rightarrow \beta_m = i\frac{m\pi}{b}, B(y) \propto \sin\frac{m\pi}{b}y$$
(1.82)

Aus (1.78) und (1.79) folgt

$$\gamma^2 = -\alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \gamma_{mn} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$
(1.83)

Das Potential lautet dann

$$\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}z\right)$$
(1.84)

Jetzt bleibt noch eine Randbedingung übrig. Diese nutzen wir jetzt:

$$\Phi(z=c) = V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}c\right).$$
 (1.85)

Daraus können wir auf eine doppelte Fourierentwicklung schließen. Wir müssen beachten, dass wir keine negativen n nehmen müssen, da sonst voneinander abhängige Funktionen entstehen: $\sin \frac{\pi x}{a} = -\sin \frac{-\pi x}{a}$. Es gilt nun

$$\{f_{nm}\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\right\}$$
(1.86)

und damit die Koeffizienten ${\cal D}_{nm}$ bestimmen über

$$D_{nm} = \frac{4}{ab\sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}c\right)} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \, V(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{1.87}$$

1.15 Kugelkoordinaten

Dasselbe wollen wir nun in Kugelkoordinaten durchführen. Die Kugelkoordinaten werden definiert durch

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta.$$
(1.88)

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten hat die Form:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \ \partial_\theta \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi = 0.$$
(1.89)

Als Lösungsansatz wählen wieder den Seperationsansatz mit $\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$. Damit

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} P Q + \frac{UQ}{r} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{UP}{r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = 0.$$
(1.90)

Dies multiplizeren wir mit $\frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ},$ daraus ergibt sich

$$r^{2}\sin^{2}\theta\left[\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}r^{2}} + \frac{1}{P}\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^{2}Q}{\mathrm{d}\varphi^{2}} = 0.$$
 (1.91)

Der erste Term ist φ -Unabhängig wobei der zweite ist nur φ -Abhängig. Daher muss der zweite Term konstant sein.

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow Q = C\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi} \tag{1.92}$$

und setzen dies direkt ein

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0.$$
(1.93)

Der erste Summand ist nun von rAbhängig und die letzten beiden nicht. Daher müssen sie konstant alt Funktion von rsein

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} = l(l+1) \quad , \quad \frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{1.94}$$

Hier, zunächst, ist l(l+1)eine "Bezeichnung" für die Konstante. Wir schreiben die erste Gleichung um:

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}U = 0.$$
(1.95)

Die allgemeine Lösung muss eine Summe von Potenzen sein muss:

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}. (1.96)$$

Für die zweite Gleichung wechseln wir die Variable als $x \equiv \cos \theta$. Mit $dx = \sin \theta \, d\theta$ gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(1-x^2) \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0.$$
(1.97)

Die Lösungen dieser Gleichung sind Legendre-Polynome $P_l(x)$ mit $l = 0, 1, 2, 3, ..., d.h., l \in \mathbb{N}_0$. Sonst (für $l \neq 0, 1, 2, 3, ...$) ist die Lösung singulär für $x = \pm 1$. Es gilt

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2 - 1)^l, \ l \in \mathbb{N}_0$$
(1.98)

Die ersten Legendre-Polinome kann man berechnen: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$.

Die Polynome sind so normiert, sodass $P_l(1) = 1$ gilt. Es gilt

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \,. \tag{1.99}$$

Einen vollständigen orthonormalen Satz ergibt sich durch

$$f_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) . \qquad (1.100)$$

Nun betrachten wir, was für ein beliebiges m passiert. Wir betrachten Gleichung (1.97). Die Lösungen davon sind die zugeordneten Legrendepolynome: Für m > 0, d.h., für m = 1, 2, 3, ... gilt

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m},$$
(1.101)

Offensichtlich die nichttriviale Lösungen gibt es nur für $m \leq l$. Für die negativen m erhalten wir die Lösung aus der folgenden Gleichung

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$
(1.102)

Für alle m=-l,-l+1,...,l-1,l gilt somit:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} P_l(x).$$
(1.103)

Anstatt Gleichung (1.99) erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, P_{l}^{m}(x) P_{l'}^{m}(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{l,l'}.$$
(1.104)

Bei festem *m* bilden $P_l^m(x)$ einen vollständigen orthogonalen Satz auf $x \in [-1, 1]$, genauso wie $Q_m(\varphi) = e^{\pm i m \varphi}$ auf $\phi \in [0, 2\pi]$. Deswegen können wir sagen, dass

$$P_l^m Q_m = P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \text{ für } l = 0, 1, 2..., \text{ und } m = -l, ...l$$
 (1.105)

ein vollständiger orthogonaler Satz der Funktionen auf der Kugelfläche ist. Man definiert damit

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$
 (1.106)

Dies ist die Kugelflächenfunktion auf der Oberfläche einer Einheitskugel. Wir zeigen die Orthonomierung

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\theta \,\sin\theta \,Y_{l'm'}^{*}Y_{lm} = \delta_{ll'}\delta_{mm'},\tag{1.107}$$

für die Vollständigkeit gilt darüberhinaus

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta').$$
(1.108)

Zwei Eigenschaften sind leicht einzusehen:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^* \quad , \quad Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta). \tag{1.109}$$

Für einige l gilt damit

$$l = 0: Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{1.110}$$

$$l = 1: Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \tag{1.111}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\varphi} \tag{1.112}$$

$$l = 2: Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$
(1.113)

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \, e^{\pm i\varphi} \tag{1.114}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta \, e^{\pm 2i\varphi} \tag{1.115}$$

Für eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung gilt damit

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} PQ = \frac{U(r)}{r} Y_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right) Y_{lm}.$$
 (1.116)

Betrachten wir ein Beispiel. Wir wollen zwischen zwei Kugelflächen, die ineinander liegen ein Randwertproblem lösen, wobei $\Phi(R_1, \theta, \varphi) = V_1(\theta, \varphi)$ und $\Phi(R_2, \theta, \varphi) = V_2(\theta, \varphi)$ ist. Wir wollen im inneren das Potential wissen. Falls der erste Radius $R_1 = 0$, dann müssen alle B_{lm} Null sein, ansonsten käme es zu einer Singularität. Analog dazu, falls $R_2 = \infty$ müssen alle A_{lm} verschwinden.

1.16 Multipolentwicklung (Kartesische Koordinaten)

Es gebe eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$, welche sich in einem bestimmten Bereich lokalisieren lässt. Wir wählen den Ursprung der Koordinaten in diesem Bereich und wollen das Potential $\Phi(\vec{r})$ weit von diesem Bereich finden. Dann gilt $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$. Wir beginnen bei

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},\tag{1.117}$$

und entwickeln um $\vec{r}' = 0$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{r} - \sum_{i} r'_{i} \frac{\partial}{\partial r_{i}} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{ij} r'_{i} r'_{j} \frac{\partial^{2}}{\partial r_{i} \partial r_{j}} \frac{1}{r} \dots, \qquad (1.118)$$

wobei $r \equiv |\vec{r}|$. Wir berechnen die drei ersten Beiträge

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{r} + \sum_{i} r'_{i} \frac{r_{i}}{r^{3}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} r'_{i} r'_{j} \frac{(3r_{i}r_{j} - r^{2}\delta_{ij})}{r^{5}} + \dots$$
(1.119)

Das lässt sich umschreiben als

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i} \frac{r_i}{r^3} r'_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} \left(3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right) + \dots$$
(1.120)

Für das Potential gilt dementsprechend

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} Q^{(0)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} Q_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij}^{(2)} + \dots \right].$$
 (1.121)



Abbildung 1.8: Multipolenteicklung

Die $Q{\rm s}$ werden dabei über

$$Q^{(0)} = \int_{V} dV \ \rho(\vec{r}') = q \qquad \text{Monopol} \qquad (1.122)$$
$$Q_{i}^{(1)} = \int dV \ r_{i}\rho(\vec{r}') = p_{i} \qquad \text{Dipol} \qquad (1.123)$$

$$Q_{ji}^{(2)} = \int_{V} dV \left(3r'_{i}r'_{j} - (r')^{2}\delta_{ij} \right) \rho(\vec{r}') \qquad \text{Quadrupol} \qquad (1.124)$$

dargestellt. Siehe Fig. 1.8

1.17 Multipolentwicklung (Kugel-Koordinaten)

Es gilt (ohne Beweis) das Additionstheorem:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^{l}}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^{*}(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) , \qquad (1.125)$$

wobei $r_{>} = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$ und $r_{<} = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$. Für die Multipolentwicklung gilt $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$, also $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$.

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V \; \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V \mathrm{d}V \; \rho(\vec{r}') \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{1.126}$$

oder vereinfacht

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi), \text{ mit } q_{lm} = \int_V \mathrm{d}V \ \rho(\vec{r}')(r')^l Y_{lm}^*(\theta',\varphi').$$
(1.127)

Diese nennt man manchmal Kugelmultipol
momente. Teilweise besitzen die q_{lm} in der Literatur unterschiedliche Vorfaktoren.

Der Zusammenhang zwischen Kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten ist für die ersten paar Terme:

14.11.14

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{V} dV \ \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \tag{1.128}$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{V} dV \, z' \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \tag{1.129}$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_{V} dV \, (x' - iy') \rho(\vec{r}\,') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y)$$
(1.130)

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int_{V} dV \, (3(z')^2 - (r')^2) \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}$$
(1.131)

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_{V} dV \, z'(x' - iy') \rho(\vec{r}\,') = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} - iQ_{yz})$$
(1.132)

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_{V} dV \, (x' - iy')^2 \rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xx} - 2iQ_{xy} - Q_{yy})$$
(1.133)

Man kann zeigen, dass der erste nicht verschwindende Term dieser Reihe unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.

1.18 Energie im äußeren Feld

Wir nehmen an es gebe eine Ladungsverteilung zentriert um \vec{r}_0 mit $\rho(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r} - \vec{r}_0| > R$. Wir definieren $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}'$. Wenn wir nun auf die Ladungskonfiguration ein äußeres Feld $\vec{E}_{\text{ext}} = -\nabla \Phi_{\text{ext}}$ wirken lassen, können wir unter der Annahme, dass das äußere Feld sich nur wenig im Bereich der Ladungsverteilung ändert, eine Taylorreihenentwicklung für das Feld durchführen:

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0 + \vec{r}') = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \sum_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial r_i} \Big|_{\vec{r}_0} r'_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{\vec{r}_0} r'_i r'_j + \dots$$
(1.134)

$$=\Phi_{\rm ext}(\vec{r}_0) + \sum_i \frac{\partial \Phi_{\rm ext}}{\partial r_i}\Big|_{\vec{r}_0} r'_i + \frac{1}{6} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_{\rm ext}}{\partial r_i \partial r_j}\Big|_{\vec{r}_0} \left(3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}\right) + \dots$$
(1.135)

Der letzte Schritt kann vollzogen werden, weil $\nabla^2 \Phi_{\text{ext}} = 0$ ist. Für die Ladungsverteilung wählen wir \vec{r}_0 als Koordinaten-Ursprung und definieren wir $\tilde{\rho}(\vec{r}') \equiv \rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}_0 + \vec{r}')$. Es gilt

$$W = \int_{V} dV \,\rho(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \int_{V} dV \,\tilde{\rho}(\vec{r}') \Phi_{\text{ext}}(\vec{r_{0}} + \vec{r}')$$
(1.136)

$$= \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) q + \sum_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial r_i} \Big|_{\vec{r}_0} p_i + \frac{1}{6} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{\vec{r}_0} Q_{ij} + \dots$$
(1.137)

$$= q \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{p} \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_{\text{ext},i}(\vec{r}_0)}{\partial r_j} + \dots$$
(1.138)

Also 1) Ladung koppelt mit Potential; 2) Dipol-Moment - mit elektrischem Feld; 3) Quadrupol-Moment - mit dem Gradienten des Feldes.

Als nächtes berechnen wir die Kraft, die auf eine Ladungsverteilung wirkt. Wenn das Monopol-Moment nicht verschwindet der leitende Beitrag lautet

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = -\vec{\nabla}_{r_0} W(\vec{r}_0) = q \vec{E}_{ext}(\vec{r}_0)$$
(1.139)

Die Kraft auf ein Dipol-Moment ergibt sich als (wir ersetzen $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}, \vec{E}_{ext} \rightarrow \vec{E}$)

$$F_j = \sum_i p_i \frac{\partial E_i}{\partial r_j} = \sum_i p_i \frac{\partial E_j}{\partial r_i} . \qquad (1.140)$$

Hier haben wir benutzt $\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \partial E_i / \partial r_j = \partial E_j / \partial r_i$. Also

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{ext} . \tag{1.141}$$

Für das Drehmoment auf Dipol ergibt sich durch $d\vec{N}=\vec{r}\times d\vec{F}$

$$\vec{N} = -\int d^3 r' \,\tilde{\rho}(\vec{r}\,') \,\vec{r}\,' \times \vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) = \vec{p} \times \vec{E}_{ext} \;. \tag{1.142}$$

2 Magnetostatik

2.1 Strom und die Kontinuitätsgleichung

Ruhende Ladungen "produzieren" elektrische Felder. Jetzt betrachten wir bewegte Ladungen. Diese "produzieren" Ströme, welche ein Magnetfeld erzeugen. Wir nehmen im Folgenden stationäre (zeitunabhängige) Ströme an. Dies ist die Magnetostatik. Elektrischer Strom ist definiert als

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}I = \vec{j}\vec{n}\,\mathrm{d}S,\tag{2.1}$$

wobei \vec{j} die Stromdichte darstellt.

Wir nutzen die Ladungserhaltung zur Herleitung. Wir betrachten ein beliebiges Volumen V mit einer geschlossenen Oberfläche S. Die Ladung ist erhalten, wenn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V} \mathrm{d}V \ \rho(\vec{r}, t) + \int_{S} \mathrm{d}S \ \vec{n}\vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \tag{2.2}$$

gilt. Wir nutzen den Gaußschen Satz und ziehen die Ableitung in das Integral hinein

$$\int_{V} dV \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \vec{j}(\vec{r}, t) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \vec{j}(\vec{r}, t) = 0.$$
(2.3)

In der Magnetostatik ist der erste Summand 0 und daher ist die Divergenz der Stromdichte 0.

2.1.1 Biot Savart-Gesetz

Wir betrachten zwei geschlossene Wege C_1 und C_2 durch die der Strom I_1 und I_2 fließt. Wir fragen nun welche Kraft auf das Element $d\vec{l_1}$ bei $\vec{r_1}$ von einem Element $d\vec{l_2}$ an Position $\vec{r_2}$ erzeugt wird. Es gilt

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times (\mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$
(2.4)

und in integraler Form

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times (\mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$
(2.5)

Die Konstante μ_0 (SI Einheitssystem) ist gegeben durch $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$. Darüber können wir die magnetische Flussdichte/Induktion \vec{B} (manchmal falschweise als Magnet-feld genannt) als

$$\mathrm{d}\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{2.6}$$

definieren. Dies ist magnetische Induktion, die vom Stromelementen $I_2 d\vec{l_2}$ in der Position $\vec{r_1}$ erzeugt wird. Für die Kraft auf das Stromelement $I_1 d\vec{l_1}$ gilt damit

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_{12}, \tag{2.7}$$

worüber man integrieren kann. Die Einheit der magnetischen Induktion im SI-System heisst Tesla (T). Das Magnetfeld ist im SI Einheitssystem definiert als $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$.



Abbildung 2.1: Zu Berechnung magnetischer Induktion eines Drahtes

2.2 Magnetfeld im Gauß-System

Wir definieren $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Im Gauß-System gilt für die Kraft auf ein Stromelement

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times (\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} \tag{2.8}$$

und

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{B}_{12}.$$
 (2.9)

Die magnetische Induktion ist dabei definiert als

$$\mathrm{d}\vec{B}_{12} = \frac{1}{c} I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$
(2.10)

Man wählt $\frac{1}{c}$ in den beiden letzten Gleichungen als "Normierung", weil es im relativistischen geschickter ist. Im Vakuum gilt zudem $\vec{H} = \vec{B}$. Im Gauß-System ist die Einheit der magnetischen Flussdichte Gauß mit der Umrechnung 1 T $\leftrightarrow 10^4$ G.

2.3 Kraft zwischen zwei parallelen Drähten

Als Anwendungsbeispiel wollen wir nun die Kraft zwischen zwei parallel Drähten berechnen. Dazu 19.11.14 nehmen wir zuerst an, dass der Draht mit Strom I_2 auf der z-Achse liegt (siehe Abb. 2.1). Nun wollen wir die magnetische Feldstärke an einem Punkt $\vec{r_1} = (0, R, z_1)$ bestimmen, der in der yz-Ebene mit Abstand R vom Draht liegt (siehe Abb. 2.1). Es gilt

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \int dz_2 \frac{\mathrm{R}}{(R/\sin\theta)^3},\tag{2.11}$$

wobei z_2 ist die z-Koordinate des Ortes $\vec{r_2}$. Mir $z_1 - z_2 = R \cot \theta$ und $dz_2 = R d\theta / \sin^2 \theta$ erhalten wir

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{R} \vec{e}_x.$$
(2.12)

Wir betrachten nun einen zweiten Draht, mit dem Strom I_1 . Der Draht ist in z-Richtung ausgerichtet und läuft durch den Ort $\vec{r_1}$. Die Kraft auf den Draht mit Strom I_1 ergibt sich als

$$d\vec{F}_{12} = I_1 \vec{e}_z dz_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1) = -\vec{e}_y \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2 I_1}{R} dz_1.$$
(2.13)

Für den Fall $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ und R = 1 m gilt

$$\frac{\mathrm{d}|F_{12}|}{\mathrm{d}z_1} = 2 \cdot 10^{-7} \,\mathrm{N/m}. \tag{2.14}$$

2.4 Allgemeine Formulierung des B.-S.-Gesetzes

Wir nehmen an es gäbe in einem Raum eine beliebige Verteilung der Stromdichte \vec{j} . Nun wollen wir feststellen, welche magnetische Feldstärke aus dieser Anordnung folgt. Nach dem B.-S.-Gesetz folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathrm{d}V \; \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$
(2.15)

Dies sieht gravierend ähnlich aus, wie das Coloumbgesetz, wobei das letztere durch einen Skalar "produziert" wird, während diese hier durch einen Vektor "produziert" wird. Darüber hinaus die Kraft die auf eine Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ wirkt ergibt sich als

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{V} \mathrm{d}V \, \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}).$$
(2.16)

Kraft auf Punktladung: Wir bestimmen zuerst die Stromdichte einer Punktladung die sich im Ort $\vec{r_0}$ befindet und mit Geschwindigkeit v sich bewegt. Diese können wir über ihre Geschwindigkeit angeben:

$$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}_0).$$
(2.17)

Dies ist natürlich die Lorentzkraft.

2.5 Feldgleichung, Vektorpotential, Ampere-Gesetz

Wir gehen analog wie beim elektrischen Feld vor. Mit

$$\vec{\nabla}_r \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{2.18}$$

erhalten wir aus (2.15)

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \vec{j}(r') \times \nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int d^3 r' \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r'}|}.$$
(2.19)

Wir definieren das Vektorpotential durch:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(2.20)

sodass

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{2.21}$$

Hier gilt die Eichfreiheit: man kann das andere Vektorpotential definieren durch $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla \chi(\vec{r})$, wobei das Skalarfeld $\chi(\vec{r})$ beliebig ist. Damit wird \vec{B} sich nicht ändern, d.h., $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A'}$. Jedoch, hier werden wir $\chi = 0$ wählen und die Formel (2.20) benutzen. Damit erhalten wir

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \underbrace{\nabla_{r'} \vec{j}(\vec{r}\,')}_{=0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 0 , \qquad (2.22)$$

wobei wir die partielle Integration benutzt haben. Dabei ist zu beachten, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ nur in der Eichung gilt, die wir oben gewählt haben. Diese heisst Coulomb-Eichung. Wir wollen die Rotation von \vec{B} und Divergenz von \vec{B} berechnen:

$$\nabla \vec{B} = \nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0. \tag{2.23}$$

Daraus kann man folgern, dass das B-Feld nicht einzelne feste Quellen besitzt. Aus der Rotation des B-Feldes folgt das Ampere-Gesetz:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla \vec{A})}_{=0} - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(r') \underbrace{\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}}_{=-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}).$$
(2.24)

2.5.1 Integralform des Ampere-Gesetzes

Wir nutzen das Stokes'sche Gesetz:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{B} = \int_S \mathrm{d}S\,\vec{n}\,(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \int_S \mathrm{d}S\,\vec{n}\,\vec{j} = \mu_0 I_C. \tag{2.25}$$

Man sieht, dass es unabhänig von den Form der Fläche ist. Es zählt nur der Strom, welcher durch diese hindurchfließt.

2.5.2 Randbedingungen

Wir wollen jetzt analog zur Oberflächenladungsdichte in der Elektrostatik eine Flächenstromdichte $\vec{K}(\vec{r})$ definieren über die wir die Randbedingungen für Probleme der Magnetostatik definieren. Die Dimensionalität von \vec{K} sei

$$[\vec{K}] = \left[\frac{\text{Strom}}{\text{Länge}}\right] = \frac{\text{A}}{\text{m}} .$$
(2.26)

fest. Wir gehen ähnlich vor, wie bei der Elektrostatik und denken uns erst ein gauss'sches Kästchen an einer Oberfläche (Abb. 2.2 linke Seite). Danach nutzen wir Gleichung (2.23) mit dem Gauss'schen Satz. Dadurch erhalten wir

$$\int_{S} \mathrm{d}S \ \vec{n} \ \vec{B} = \int_{V} \mathrm{d}V \ \nabla \vec{B} \Rightarrow (\vec{B}_{1} - \vec{B}_{2})\vec{n} = 0, \tag{2.27}$$

wenn wir die beiden Oberflächen immer weiter zusammenlaufen lassen. Als nächstes betrachten wir über das Ampersche Gesetz ein Rechteck, dessen Seitenflächen parallel zur Oberfläche liegen (eine darin, eine draußen) (siehe Abb. 2.2 rechte Seite):

$$\int d\vec{l} \, \vec{B} = \mu I_C \Rightarrow \vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K}.$$
(2.28)

Daher gilt

$$B_{2,\perp} - B_{1,\perp} = 0$$
 , $B_{2,\parallel} - B_{1,\parallel} = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}.$ (2.29)



Abbildung 2.2: Randbedingungen für \vec{B}

Wir fragen uns nun, welche Bedingung dies für das Vektorpotential mit sich führt. Wir nutzen die gleiche Form wie beim letzten mal:

$$\oint_C \vec{A} \, \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \; \vec{n} \mathrm{d}S = \int_S \vec{B} \; \mathrm{d}\vec{S} \xrightarrow{\delta \to 0} 0. \tag{2.30}$$

Es folgt daher $\vec{A}_{1,\parallel} = \vec{A}_{2,\parallel}$. Zusätzlich gilt nur in Coulomb-Eichung $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \ \vec{A}_{1,\perp} = \vec{A}_{2,\perp}$.

2.6 Multipolentwicklung, magnetischer Dipol

Wir beginnen mit der Formel für das Vektorpotential und betrachten große Abstände von der Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$. Also $\vec{j}(\vec{r}') \neq 0$ nur wenn r' < R. Wir betrachten aber das Vektorpotential im Ort \vec{r} , sodass $r \gg R$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.31}$$

Wir nutzen die Multipolentwicklung aus der Elektrostatik

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int d^3 r' \,\vec{j}(\vec{r}\,')}_{=\vec{A}^{(0)}(\vec{r})} + \underbrace{\sum_i \frac{r_i}{r^3} \int d^3 r' \,r'_i \,\vec{j}(\vec{r}\,')}_{=\vec{A}^{(1)}(\vec{r})} + \dots \right],$$
(2.32)

und zeigen, dass $\vec{A}^{(0)}(r) = 0$ ist.

Erst bekommen wir eine nützliche Identität: Für beliebige $f(\vec{r}), g(\vec{r})$ und für die Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$, sodass $\vec{j}(r) = 0$ für r > R und $\nabla \vec{j} = 0$ (Magnetostatik) gilt: $\int dV \left[f(\vec{j} \nabla g) + g(\vec{j} \nabla f) \right] = 0$. Das kann man beweisen mit Hilfe partieller Integration. Erst wählen wir $f = 1, g = r_i$. Das führt zu

$$f = 1, g = r_i \Rightarrow \int \mathrm{d}^3 r \; j_i = 0. \tag{2.33}$$

Damit ist bewiesen, dass $\vec{A}^{(0)} = 0$, also es gibt keinen Monopol-Beitrag. Für den Dipolbeitrag wählen wir $f = r_k$, $g = r_i$. Das führt zu

$$f = r_k, \ g = r_i \Rightarrow \int \mathrm{d}^3 r \ (r_i j_k + r_k j_i) = 0 \tag{2.34}$$

und damit



Abbildung 2.3: Das \vec{B} -Feld eines magnetischen Dipols mit $\vec{m} \parallel \vec{e}_z$

$$A_k^{(1)} = \frac{1}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i r_i \int d^3 r' \, r'_i \, j_k(\vec{r}\,') = \frac{1}{2r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i r_i \int d^3 r' \, (r_i j_k - r_k j_i).$$
(2.35)

Über den Epsilon-Tensor folgt:

$$A_{k}^{(1)} = \frac{1}{2r^{3}} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \sum_{il} r_{i} \epsilon_{ikl} \int d^{3}r' \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right]_{l} = -\frac{1}{2r^{3}} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[\vec{r} \times \int d^{3}r' \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right] \right]_{k}, \quad (2.36)$$

was wiederum

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{1}{2r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{r} \times \int d^3 r' \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right].$$
(2.37)

impliziert. Dies kann auch über das magnetische Dipolmoment ausgedrückt werden:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right].$$
(2.38)

Jetzt können wir das Magnetfeld eines Dipols berechnen. Wir erhalten

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \, . \tag{2.39}$$

Das ergibt (die Rechnung wird hier nicht gezeigt)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} \approx \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right]$$
(2.40)

Der Vektor $\vec{n}\equiv\vec{r}/r$ zeigt in Richtung des Vektors
 $\vec{r}.$ Das $\vec{B}\text{-}{\rm Feld}$ eines Dipols wird in Abb. 2.3 gezeigt.

Magnetisches Moment einer Leiterschleife, die in einer Ebene liegt:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{2} \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l}$$
(2.41)

Jetzt nutzen wir $\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{l} = dS\vec{n}$.

$$\vec{m} = I \int \mathrm{d}S\vec{n} = IS\vec{n} \tag{2.42}$$

Hier ist ${\cal S}$ die Fläche der Stromschleife.

26.11.2012

2.7 Gyromagnetisches Verhältnis

Wir betrachten einen starren Körper, der mit einer Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert. Es gibt also ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Die Stromdichte sei $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$, wobei $\rho(\vec{r})$ die Ladungsdichte ist. Wir nehmen zusätzlich an, der Körper besitze eine Massendichte $\rho_m(\vec{r})$. Das magnetische Moment lautet

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \; \rho(\vec{r}) \vec{r}' \times \vec{v}(\vec{r}') \tag{2.43}$$

Der Drehimpuls ist

$$\vec{L} = \int \mathrm{d}^3 r \,\rho_m(\vec{r}\,)\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}\,). \tag{2.44}$$

Annahme: ρ und ρ_m sind gleich verteilt. Daher gilt $\frac{\rho}{\rho_m} = \text{const} = \frac{q}{M}$. Damit kommt man auf

$$\vec{m} = \frac{q}{2M}\vec{L} \tag{2.45}$$

Diese Formel ist rein klassisch. Für Elektron gilt

$$\vec{m} = -g \frac{e}{2m_e} \vec{L} \tag{2.46}$$

hit $g\approx 2$ (Elektron hat negative Lading). Das bekommt man aus Dirac-Gleichung.

2.8 Kraft und Drehmoment auf magnet. Moment im äußeren Magnetfeld

Wir betrachten Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ die sich in einem endlichen (kleinen) Bereich (Ausdehnung R_0) um den Koordinatenursprung von 0 unterscheidet. D.h., $\vec{j}(\vec{r}) = 0$ für $r \gg R_0$. Dann gilt für die Kraft auf die Stromverteilung

$$\vec{F} = \int d^3 r \, \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = \int d^3 r \, \vec{j}(\vec{r}) \times \left[\vec{B}(0) + \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) + \dots \right].$$
(2.47)

Wir betrachten nur den Dipolbeitrag (erster Summand ist 0 denn $\int dV \vec{j} = 0$):

$$F_k = \sum_{ilm} \int \mathrm{d}^3 r \,\epsilon_{klm} j_l(r) r_i \nabla_i B_m(0) = \frac{1}{2} \sum_{ilm} \int \mathrm{d}^3 r \,\epsilon_{klm} (j_l r_i - j_i r_l) \nabla_i B_m(0) \tag{2.48}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ilmp} \int d^3 r \,\epsilon_{klm} \epsilon_{pil} (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0) \tag{2.49}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{imp} \int \mathrm{d}^3 r \; (\delta_{mp} \delta_{ki} - \delta_{mi} \delta_{kp}) (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0) \tag{2.50}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m}\int \mathrm{d}^{3}r \left[(\vec{r}\times\vec{j})_{m}\nabla_{k}B_{m}(0) - \underbrace{(\vec{r}\times\vec{j})_{k}\nabla_{m}B_{m}(0)}_{=0,\nabla\vec{B}=0} \right]$$
(2.51)

$$=\sum_{m} m_m \nabla_k B_m(0) = \sum_{j} m_j \nabla_k B_j(0) \Rightarrow \vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}).$$
(2.52)

Das bedeutet die potentielle Energie eines magnetischen Momentes im äußeren Magnetfeld beträgt $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, sodass $F = -\vec{\nabla}U$.

Für das Drehmoment auf die Stromverteilung gilt

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} \Rightarrow \vec{N} = \int d^3r \ \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \vec{m} \times \vec{B}$$
(2.53)

Der Beweis wird als Übung angeboten.

2.9 Faraday'sches Induktionsgesetz

Elektrostatik $(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$: Es gilt $\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \nabla \times \vec{E} = 0, \vec{E} = -\nabla \Phi$. Magnetostatik $(\nabla \vec{j} = 0)$: Es gilt $\nabla \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Faraday entdeckte, dass eine zeitliche Änderung von \vec{B} das elektrische Feld \vec{E} induziert. Für eine beliebige Kontour C gilt

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{B}.$$
(2.54)

 \mathcal{E} ist genannt als elektromotorische Kraft (EMK). Der magnetische Fluss ist definiert durch

$$\Phi \equiv \int_{S} \mathrm{d}\vec{S} \tag{2.55}$$

 (wir müssen jetzt das Skalar
potential als φ nennen) Das Faraday-Gesetz lautet

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.\tag{2.56}$$

Nun wollen wir es in Differentialform bringen:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{E} = \int_S \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{B}\,(\nabla \times \vec{E}) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$
(2.57)

2.10 Magnetische Energie

Magnetische Energie ist die Arbeit die gegen die EMK geleistet werden muss. Z.B., man erzeugt die Ströme in den Stromschleifen, die Ströme erzeugen die zeitabhängigen magnetischen Flüsse, die Flüsse erzeugen die EMK. Gegen die EMK muss Arbeit geleistet werden um den Strom weiter zu erhöhen.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \vec{F}_{i} \vec{v}_{i} = -\sum q_{i} \left(\vec{E}_{i} + \vec{v}_{i} \times \vec{B}_{i}\right) \vec{v}_{i} = -\int \mathrm{d}^{3}r \ \vec{E} \cdot \vec{j}.$$
(2.58)

Für mehreren Stromschleifen ist die Formel einfach zu schreiben

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i} I_{i} \oint_{C_{i}} \mathrm{d}\vec{l} \,\vec{E} = -\sum I_{i} \mathcal{E}_{i}.$$
(2.59)

Wir benutzten jetzt das Ampere-Gesetz $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ und mit (2.58) erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \ \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \ \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$
(2.60)

(hier wurde partielle Integralion benutzt)

Mit dem Faradey-Gesetz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{B}^2 \Rightarrow W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{B}^2. \tag{2.61}$$

2.10.1 Induktivitätskoeffizienten

Wir betrachten wieder eine Anordnung von Stromschleifen (C_1, C_2, \ldots, C_n) mit den Strömen I_1, I_2, \ldots, I_n . Wir berechnen zunächst das Vektor-Potential das von dieser Stromverteilung erzeugt wird

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \int d^3 r_i \, \frac{\vec{j}(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$
(2.62)

Hier $\vec{r_i} \in C_i$.

Wir nehmen die Vereinfachung an, das die Schleifen (Drähte) extrem dünn sind:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{C_i} \frac{\mathrm{d}\vec{l_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}.$$
(2.63)

Magnetischer Fluss durch die Schleife j lautet

$$\Phi_{j} = \int_{S_{j}} \mathrm{d}\vec{S}_{j} \ \vec{B}(\vec{r}_{j}) = \int_{C_{j}} \mathrm{d}\vec{l}_{j} \ \vec{A}(r_{j}) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \sum_{i} I_{i} \oint_{C_{i}} \oint_{C_{j}} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_{j}}{|\vec{r}_{i} - \vec{r}_{j}|} = \sum_{i} M_{ji} I_{i}$$
(2.64)

Die Koeffizienten

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$
(2.65)

${\rm nennt} \,\, {\rm man} \,\, {\bf Induktivit } {\bf \ddot{a}ts ko effizienten}.$

Man unterscheidet die Selbstinduktivitäten $L_i \equiv M_{ii}$ und die Gegeninduktivitäten M_{ij} für $i \neq j$. Die Formel (2.65) ist für die Selbstinguktivitäten problematisch, denn in diesem Fall "laufen" \vec{r}_i und \vec{r}_j entlang der selbem Schleife. Falls die Schleife unendlich Dünn ist, kommt es zu Divergenz (nur logarithmisch).

Lösung des Problems: endliche Dicke des Drahtes. Z.B., für einen ringförmigen Draht mit Radius ${\cal R}$ und Dickea gilt

$$M_{ii} = L_i \propto \frac{\mu_0}{4\pi} R \ln \frac{R}{a} \tag{2.66}$$

2.10.2 Gesamtenergie einer Anordnung der Stromschleifen

Wir nehmen an, es fließen Ströme und wir wissen alle Induktionskoeffizienten. Nun wollen wir wissen, welche magnetische Energie in dieser Anordnung steckt:

$$W_{\rm mag} = \int dt \, \frac{dW_{\rm mag}}{dt} = \int dt \, \left(\frac{dW_{\rm EMK}}{dt} + \frac{dW_{\rm mech}}{dt}\right) \tag{2.67}$$

Damit gilt

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i} I_i \mathcal{E}_i = \sum_{i} I_i \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (M_{ij}I_j)$$
(2.68)

Nun gibt es Möglichkeiten die Konfigurationen zu bringen

- 1. erst Schleifen in die entgültige Position bringen, dann Strom erzeugen
- 2. erst Ströme im Leiter weit weg voneinander erzeugen und dann zusammenbringen.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{EMK}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (M_{ij}I_j) + \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}$$
(2.69)

28.11.14

Im ersten Fall bewegen sich die Schleifen nicht (nur am Anfang wenn keine Kräfte wirken). Daher verschwindet die mechanische Arbeit. In der endgültigen Position der Schleifen, wo der Strom erzeugt wird, sind M_{ij} zeit unabhängig. Das ergibt

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (M_{ij}I_j) = \sum_{ij} M_{ij}I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_j = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij}I_i I_j \Rightarrow W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij}I_i I_j \quad (2.70)$$

Im zweiten Fall ist es umgekehrt. Ströme sind konstant und Schleifen bewegen sich. In diesem Fall ist die mechanische Arbeit wichtig

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i I_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (M_{ij}) + \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}.$$
 (2.71)

Die Relation

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j \tag{2.72}$$

kann invertiert werden:

$$I_i = \sum_j (M^{-1})_{ij} \Phi_j.$$
 (2.73)

Dabei gilt für die Magnetische Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (M^{-1})_{ij} \Phi_i \Phi_j.$$
(2.74)

Dies kann man über die Definition des magnetischen Flusses umschreiben

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_i \int_{C_i} d\vec{l}_i \ \vec{A}(\vec{r}_i) \Rightarrow \frac{1}{2} \int d^3r \ \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$
(2.75)

und danach partiell Integrieren (mit der Annahme, das alle Randterme im Unendlichen verschwinden):

$$W_{\rm mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \, \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \, \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \, \vec{B}^2.$$
(2.76)

Dies ist äquivalent zum früher gefundenen Energiewert.

3 Maxwell-Gleichungen, el./magn. Wellen, Strahlen

3.1 Maxwell-Gleichungen

Wir schreiben nun alle Gleichungen ein weiteres mal aus:

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \text{ Gauß-Gesetz}$$
(3.1)

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$
, Faraday-Gesetz (3.2)

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$
, Ampere-Gesetz (3.4)

Das Ampere-Gesetz ist unvollständig, da das der Ladungserhaltung, d.h., der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ widerspricht. Um das zu zeigen berechnen wir

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} \tag{3.5}$$

D.h., das Ampere-Gesetz ist nur im statischen Fall, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, gültig. Maxwell erkannte diesen Widerspruch und modifizierte die vierte Gleichung zu

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$
(3.6)

Die Divergenz dieser Gleichung ergibt die Ladungserhaltung und damit ist Konsistent:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$
(3.7)

Hier haben wir das Gauß-Gesetz benutzt. Die Größe $\epsilon_0 \partial E / \partial t$ nennt man Verschiebungsstromdichte. Im Gaußsystem sehen die Maxwell-Gleichungen so aus

$$\nabla \vec{E} = 4\pi\rho, \text{ Gauß-Gesetz}$$
(3.8)

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$
, Faraday-Gesetz (3.9)

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{3.10}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$
, von Maxwell geändertes Ampere-Gesetz (3.11)

Wir werden ab jetzt das Gaußsystem benutzen.

3.2 Vektor- und Skalarpotential, Eichtransformation

Die Zwei homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
 (3.12)

erlauben eine bequeme Parametrisierung von \vec{E} und \vec{B} . Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt, dass es \vec{A} existiert, sodass $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Dann, die zweite homogene Maxwell-Gleichung lässt sich umschreiben als

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi.$$
(3.13)

Hier ist \vec{A} das Vektor-Potential und φ ist das Skalar-Potential. Also

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \qquad (3.14)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \ . \tag{3.15}$$

Die Inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind:

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \vec{A} \right) = 4\pi\rho \tag{3.16}$$

und für die allerletzte

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$
 (3.17)

3.2.1 Eichfreiheit

Die Eichtransformation ist

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$
(3.18)

Dadurch verändern sich weder \vec{B} noch \vec{E} -Feld. D.h.

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} , \qquad (3.19)$$

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} .$$
(3.20)

Daher haben wir eine gewisse Freiheit (Eichfreiheit) in der Wahl der Potentiale φ, \vec{A} . Dies kann man mit Bedingungen fixieren. Diese heißen Eichungen. Die zwei wichtigsten sollen nun diskutiert werden.

- 1. Coulomb-Eichung (auch Strahlungseichung): $\nabla \vec{A} = 0$ (vor allem bei Strahlungsproblemen)
- 2. Lorenz-Eichung: $\nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (explizit relativistisch invariant)

Die Lorenz-Eichung ist nach dem dänischen Physiker Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891) genannt. Später werden wir sehen, dass Lorenz-Eichung invariant bezüglich Lorentz-Transformationen ist (genannt nach dem holländischen Physiker Hendrik Anton Lorentz (1853-1928), Nobelpreis 1902). Wir zeigen jetzt, dass man immer die Eichtransformation finden kann, die uns die Potentiale in der Lorenz-Eichung (oder Coulomb-Eichung) ergibt. Wir fangen an mit Potentialen φ, \vec{A} die keine Eichbedingung erfüllen. Dann suchen wir nach χ sodass

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \Rightarrow \nabla \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$
(3.21)

03.12.2014

Es ergibt sich dann die Differenzialgleichung für χ

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\left(\nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{3.22}$$

Wir werden später sehen, dass solche (Wellen-) Gleichungen immer gelöst werden können. Zu Bemerken ist, dass die Lorenzeichung nicht die Freiheit komplett einschränkt. Offensichtlich eine weitere Transformation mit einem χ , dass die homogene Wellen-Gleichung erfüllt $\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ verletzt die Lorenz-Bedingung nicht.

Inhomogene Maxwell-GI. in Lorenz-Eichung

Wir nehmen an die Lorenz-Eichung gilt:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{3.23}$$

Inhomogene Maxwel-Gl. in Coulomb-Eichung

Wir nehmen an die Coulomb-Eichung gilt:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{3.24}$$

Die erste Gleichung können wir einfach mit dem Ansatz

$$\varphi(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$
(3.25)

Nun zerlegen wir die Stromdichte in senkrechte (transversale) und parallele (longitudinale) Komponenten. Es gilt

$$\vec{j} = \vec{j}_{\perp} + \vec{j}_{||} \Rightarrow \nabla \vec{j}_{\perp} = 0, \nabla \times \vec{j}_{||} = 0.$$
(3.26)

Die Zerlegung ist immer möglich falls \vec{j} im Unendlichen verschwindet. Aus der zwei folgenden Gleichungen

$$\nabla \times \left(\frac{1}{c}\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \quad , \quad \nabla \left(\frac{1}{c}\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{3.27}$$

(die zweite ergibt sich aus Poisson-Gleichung und der Kontinuitätsgleichung) folgt

$$\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{||}.$$
(3.28)

aufstellen. Damit ergibt sich:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp.$$
(3.29)

3.3 Energie- und Impulserhaltung, Poynting-Vektor

Wir betrachten ein System el/mag Felder \vec{E}, \vec{B} und geladene Teilchen $[\rho, \vec{j}]$ und möchten sehen, wie die Energieerhaltung in diesem Funktioniert. Dazu berechnen wir die geleistete Arbeit der Felder an Ladungen (Materie)

$$dW_{\rm mat} = \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i dt \Rightarrow \frac{dW_{\rm mat}}{dt} = \int d^3 r \vec{E} \vec{j}.$$
 (3.30)
Jetzt benutzen wir

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$
 (3.31)

Wir multiplizieren die erste mit \vec{B} und die zweite mit \vec{E} und subtrahieren sie voneinander

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{B} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}\underbrace{-\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) + \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})}_{=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})}.$$
(3.32)

Es ergibt sich also

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} = -\vec{j}\vec{E} - \frac{c}{4\pi}\nabla(\vec{E}\times\vec{B}).$$
(3.33)

Die Energiedichte des el/mag Feldes in Gauß-System lautet

$$w_{\rm em} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \ . \tag{3.34}$$

Im SI-System ist es

$$w_{\rm em} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \tag{3.35}$$

Der Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \tag{3.36}$$

heißt Poyntingvektor. Darüber können wir das Poyntingtheorem aufschreiben:

$$\frac{\partial w_{\rm em}}{\partial t} + \nabla \vec{S} = -\vec{j}\vec{E}.$$
(3.37)

Der erste Teil beschreibt die Veränderung der Energie des e/m Feldes. Der letzte Teil bezeichnet die Umwandlung der Energie des e/m Feldes in mechanische Energie von Teilchen (Materie). Der mittlere Term bezeichnet den Energiefluss (Energiestromdichte). Nun wollen wir dies in eine Integralform bringen. Wir betrachten ein Volumen V, welches von der Fläche S umschlossen wird. Die Teilchen dürfen nicht die Oberfläche S durchqueren. Wir betrachten ein Flächenelement d \vec{s} und integrieren über das gesamte Volumen V:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V} \mathrm{d}^{3}r \; w_{\mathrm{em}} + \int_{V} \mathrm{d}^{3}r \; \vec{j} \cdot \vec{E} = -\oint_{s} \mathrm{d}\vec{s} \; \vec{S} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (W_{\mathrm{em}} + W_{\mathrm{mat}}) = -\oint_{s} \mathrm{d}\vec{s} \; \vec{S}. \tag{3.38}$$

Also, die zeitliche Änderung der Gesamtenergie im Volumen V ist durch den Fluss des Poynting-Vektors (Energiestromdichte) durch die Oberfläche gegeben ist.

Nun wollen wir eine ähnliche Betrachtung für die Impulserhaltung anstellen. Wir beginnen mit dem Impuls der Materie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{i}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \vec{F}_{i} = \sum_{i} q_{i} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_{i}}{c} \times \vec{B}\right) \Rightarrow \int \mathrm{d}^{3}r \left(\rho \cdot \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right).$$
(3.39)

Wir nutzen

$$\nabla \vec{E} = 4\pi\rho$$
 , $\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ (3.40)

und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r \, \left[\vec{E}(\nabla\vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla\vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right]. \tag{3.41}$$

-

Wir betrachten die Kombination

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + c\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$
(3.42)

Hier haben wir das Faraday-Geset
z $\nabla\times\vec{E}=-(1/c)\partial\vec{B}/\partial t$ benutzt. Es ergibt sich dann

=

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3 r \; \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r \; \left[\vec{E}(\nabla \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \vec{E}) + \underbrace{\vec{B}(\nabla \vec{B})}_{=0} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right]. \tag{3.43}$$

Wir schreiben als letztes nun

$$\left[\vec{E}(\nabla\vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right]_{j} = E_{j} \sum_{i} \nabla_{i} E_{i} - \sum_{klmp} \epsilon_{jkl} \epsilon_{lmp} E_{k} \nabla_{m} E_{p}$$
(3.44)

$$E_j \sum_i \nabla_i E_i - \sum_{kmp} (\delta_{jm} \delta_{kp} - \delta_{jp} \delta_{km}) E_k \nabla_m E_p \tag{3.45}$$

$$=\sum_{k} \left(E_j \nabla_k E_k - E_k \nabla_j E_k - E_k \nabla_k E_j \right)$$
(3.46)

$$=\sum_{k} \nabla_{k} (E_{j} E_{k} - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^{2}).$$
(3.47)

Damit können wir den Maxwellschen Spannungstensor

$$T_{jk} = \frac{1}{4\pi} \left[E_j E_k + B_j B_k - \frac{\delta_{jk}}{2} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \right]$$
(3.48)

definieren. Damit ergibt sich:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{d}^3r\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}\right]_j = \int\mathrm{d}^3r\sum_k \nabla_k T_{jk}.\tag{3.49}$$

Dies hat wieder die Struktur eines Erhaltungssatzes. Dabei ist der zweite Summand der Impuls des el/mag Feldes. der Rechte Teil ist somit die zeitliche Änderung des Impulses. Damit ist

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

$$(3.50)$$

die Impulsdichte des el/mag Feldes. Der Impuls des Feldes ergibt sich als

$$\vec{P}_{\rm em} = \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{g}_{\rm em}. \tag{3.51}$$

Die Struktur des Erhaltungssatzes ist

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t}\right]_{j} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}r \sum_{k} \nabla_{k} T_{jk} = \sum_{k} \oint \mathrm{d}s_{k} T_{jk}.$$
(3.52)

 $T_j k$ ist die negative Impulsflussdichte (Flussdichte in Richtung k der Impuls-Komponente j). Wir wollen nun den Impulserhaltungssatz in Differentialform schreiben:

$$\left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} + \frac{\partial\vec{g}_{\rm em}}{\partial t}\right)_j = \sum_k \nabla_k T_{jk}.$$
(3.53)

Über den Spannungstensor kann beispielsweise die Kraft von einer Ladung auf eine metallische Kugel bestimmt werden (wie auch mit der Methode der Spiegelladungen).

3.4 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen in φ und \vec{A} Darstellung. Wir verwenden die Coulomb-Eichung:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp. \tag{3.54}$$

Wir betrachten den freien Raum: $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Wir nehmen an, dass aus $\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, da diese Lösung sich "gut" im unendlichen verhält. Damit vereinfacht sich die zweite Gleichung von Gleichung (3.54):

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$
(3.55)

Das sind 3 entkoppelten Wellengleichungen der gleiche Struktur

$$\Box f \equiv \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$
(3.56)

Diese müssen nun gelöst werden.

3.4.1 1-D Lösungen der Wellengleichung

Damit vereinfacht sich die Wellengleichung auf

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0.$$
(3.57)

Daraus folgt, dass

$$f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$
(3.58)

für beliebige Funktionen f_1, f_2 Lösung der Wellengleichung ist. Dabei läuft die erste nach rechts und die zweite nach Links mit der Geschwindigkeit c. Wir benutzen eine Fouriertransformation

$$f_j(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{f}_j(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$
(3.59)

Da f_j reell ist, folgt $\tilde{f}_j(k) = \tilde{f}_j^*(-k)$. Dann erhalten wir

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k) e^{ik(x-ct)} + \tilde{f}_2(k) e^{ik(x+ct)} \right]$$
(3.60)

$$= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + \tilde{f}_2(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\omega t)} \right], \tag{3.61}$$

wobei wir zunächst ω als $\omega = ck$ definiert haben. Die Lösungen bestehen also aus harmonischen Lösungen (ebene Wellen).

Wir betrachten jetzt eine einzige ebene Welle $e^{i(kx-\omega t)}$. Diese ist komplex. Die physikalische Lösung ist dann der Realteil davon $f = \operatorname{Re} \left[e^{i(kx-\omega t)} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{-i(kx-\omega t)} \right]$. Alle Möglichkeiten werden ausgeschöpft, wenn wir die ebene Welle immer als $e^{i(kx-\omega t)}$ schreiben und die Kreisfrequenz ω immer positiv wählen $\omega = c|k| > 0$. Dann die Welle mit k > 0 breitet sich nach rechts aus und die Welle mit k < 0 breitet sich nach links aus. Häufig lässt man das "Re" weg und mach alle Rechnungen mit komplexen Größen. Das muss aber sorgfältig gemacht werden, z.B., wenn man die Energie berechnet (da muss man die Felder quadrieren).

3.4.2 Ebene Wellen in 3D

Analog zu 1D finden wir in 3D die ebene Welle als Lösung der Wellengleichung:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} , \qquad (3.62)$$

wobei $\omega = c |\vec{k}| = ck.$

3.4.3 Ebene el/mag Wellen

In der Coulomb-Eichung müssen wir die Wellen-Gleichung mit 3 Komponenten

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} , \qquad (3.63)$$

unter Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ lösen. Die Lösung ergibt sich als

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(k\vec{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega = ck.$$
(3.64)

Hier $\vec{A_0}$ ist eine zunächst beliebige komplexe Amplitude. D.h., $\vec{A_0}$ ist ein Vektor mit 3 komplexen Komponentn. Die Coulomb-Eichung ergibt eine Beschränkung:

$$\nabla A = 0 \Rightarrow k A_0 = 0 . \tag{3.65}$$

Jetzt berechnen wir die Felder. Für das elektrische Feld gilt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A}_{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \mathrm{i}k\vec{A}_{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$
(3.66)

und für das magnetische Feld gilt

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$
(3.67)

Daraus folgt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} .$$
(3.68)

Hier $\vec{E}_0 \equiv ik\vec{A}_0$ und $\vec{B}_0 \equiv i\vec{k} \times \vec{A}_0$. Wir wollen nun die Amplituden näher betrachten:

$$\vec{A}_0 \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{B}_0 = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_0 \Rightarrow \vec{B}_0 \vec{k} = 0.$$
(3.69)

Daraus folgt, dass el/mag Wellen transversal sind, da das E- und das B-Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Beide Felder stehen senkrechtaufeinander:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \Rightarrow |\vec{B}| = |\vec{E}|, \vec{B} \perp \vec{E}.$$
(3.70)

Das sind die wichtigstens Eigenschaften der Felder einer Elektromagnetischen Welle. Den Vektor \vec{k} nennt man Wellenvektor, er bestimmt die Ausbreitungsrichtung der Welle. Dies folgt aus einer Betrachtung der Phasenfläche $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const.}$ Dies ist eine 2D-Fläche im 3D-Raum. Dies verschiebt sich in Richtung von \vec{k}/k mit der Geschwindigkeit von $c = \omega/k$. Ein weiteres Argument ist die berechnung der Energierichtung. Dafür nutzen wir die Formel für die Energiestromdichte (Poynting-Vektor):

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{S} \| \vec{k}.$$
(3.71)

Damit ist \vec{k} auch die Richtung des Energietransportes. Das *E*- und *B*-Feld haben maximale Amplitude an gleichen Stellen, dies folgt aus der Gleichheit der Beträge. Daher folgt, dass beide in Phase sind.

10.12.14



Abbildung 3.1: Linear polarisierte ebene Welle

3.5 Polarisation, lineare, zirkulare, elliptische

Wir legen die z-Achse in Richtung von \vec{k}

3.5.1 Lineare Polarisation

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$
 (3.72)

Wir nehmen zunächst an, dass \vec{A}_0 reel ist (oder einen komplexen Phasenfaktor besitzt $e^{i\alpha}$). Wir wählen $\vec{A}_0 = A_0 \vec{e}_x$ und A_0 ist reell. Dann gilt

$$\vec{A} = A_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)} \quad , \quad \text{Re}\vec{A} = A_0 \vec{e}_x \cos\left(kz - \omega t\right) \tag{3.73}$$

$$\vec{E} = ikA_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \quad , \quad \text{Re}\vec{E} = -kA_0\vec{e}_x\sin\left(kz-\omega t\right) \tag{3.74}$$

$$\vec{B} = ikA_0\vec{e}_z \times \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \quad , \quad \text{Re}\vec{B} = -kA_0\vec{e}_y\sin(kz-\omega t). \tag{3.75}$$

Diese Lösung stellt eine linear polarisierte ebene Welle dar. Siehe Abb. 3.1.

3.5.2 Elliptische Polarisation

Jetzt wollen eine allgemeine komplexe Amplitude betrachten $\vec{A_0}$. Im Fall von:

$$\vec{A}_0 = e^{i\alpha} \cdot \text{reeller Vektor} \Rightarrow \text{lineare Polarisation.}$$
 (3.76)

Im allgemeinen Fall \vec{A}_0 und entsprechend \vec{E}_0 sind beliebig komplex. Daher \vec{E}_0 kann zerlegt werden als $\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + i\vec{a}_2$. Hiere sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 reelle Vektoren. Wir berechnen $\vec{E}_0^2 = (\vec{a}_1 + i\vec{a}_2)^2$. Das ist im allgemeinen Fall eine komplexe Zahl $\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0^2|e^{i\gamma}$. Wir extrahieren dann die Phase $\alpha = \gamma/2$ aus \vec{E}_0 . Also $\vec{E}_0 = e^{i\alpha}(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)$, wobei \vec{b}_1 und \vec{b}_2 zwei neue reelle Vektoren sind. Damit ist $(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2$ reell:

$$|\vec{E}_0^2| = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2 = \vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 + 2i\vec{b}_1\vec{b}_2 .$$
(3.77)

Daraus folgt, dass \vec{b}_1 orthogonal zu \vec{b}_2 ist. Falls entweder \vec{b}_1 oder \vec{b}_2 verschwindet, liegt wieder lineare Polarisation vor. Diesen Fall wollen wir nicht betrachten. Wegen $\vec{E}_0 \vec{k} = 0$ sind die beiden Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 orthogonal zum Wellenvektor \vec{k} . Wir wählen

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{b_1}, \vec{e}_2 = \mp \frac{\vec{b}_2}{b_2}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k}$$
(3.78)

Das Vorzeichen vor \vec{b}_2 wird so gewählt, dass das System $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rechtshändig ist. Wir betrachten die Koordinatentransformation $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \rightarrow \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Das elektrische Feld wird dadurch

$$\vec{E} = (b_1 \vec{e}_1 \mp i b_2 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)} = (b_1 \vec{e}_x \mp i b_2 \vec{e}_y) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$
(3.79)

für das magentische feld gilt dagegen

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E} = (b_1 \vec{e}_y \pm i b_2 \vec{e}_x) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$
(3.80)

Betrachten wir die Physikalischen reellen Felder, so gilt:

$$\vec{E} = \vec{e}_x b_1 \cos\left(kz - \omega t\right) \pm \vec{e}_y b_2 \sin\left(kz - \omega t\right) \tag{3.81}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_y b_1 \cos\left(kz - \omega t\right) \mp \vec{e}_x b_2 \sin\left(kz - \omega t\right) \tag{3.82}$$

An einem festen Raumpunkt beschreibt \vec{E} somit eine Ellipse in der (x, y)-Ebene

$$\frac{\vec{E}_x^2}{b_1^2} + \frac{\vec{E}_y^2}{b_1^2} = 1 \quad \frac{\vec{B}_x^2}{b_2^2} + \frac{\vec{B}_y^2}{b_1^2} = 1.$$
(3.83)

Je nachdem welches Vorzeichen in Gleichung (3.82) steht rotieren diese gegen- oder mit dem Uhrzeigersinn. Es gibt einige Spezialfälle:

- $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$ folgt lineare Polarisation
- $b_1 = b_2$, dann liegt eine zirkulare Polarisation vor

Im letzten Falle nennt man die Drehung linkszirkularpolarisiert, wenn eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn vorliegt. Eine allgemeine elliptische Polarisation kann man als Überlagerung von zwei linearen Polarisationen auffassen (Bspw. $\vec{E} \| \vec{e}_x$ und $\vec{E} \| \vec{e}_y$) oder als zwei unabhängige zirkularpolarisierte Wellen.

3.6 Energie-Dichte und -Fluß

Wir betrachen eine allgemeine ebene Welle

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \vec{B} = \operatorname{Re} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$
(3.84)

und die Größen

$$\omega_{\rm em} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \text{und} \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}.$$
(3.85)

Hier ω_{em} ist die Energiedichte und \vec{S} die Energiestromdichte. Nun wollen wir die zeitgemittelten Größen berechnen. Wir nehmen an es gibt zwei ebene Wellen

$$\vec{a} = \operatorname{Re} \vec{a}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \frac{1}{2} \left[\vec{a}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \vec{a}_0^* e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right]$$
(3.86)

$$\vec{b} = \operatorname{Re} \vec{b}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = [\dots].$$
 (3.87)

Wir wollen, z.B., den zeitgemittelten Skalar-Produkt bestimmen:

$$\left\langle \vec{a} \cdot \vec{b} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\langle \vec{a}_0 \vec{b}_0^* + \vec{a}_0^* \vec{b}_0 + \dots \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a}_0 \vec{b}_0^*) .$$
 (3.88)

Hier ... bezeichnen die schnell oszillierenden Beiträge, die wegen der Zeitmittelung verschwinden. Jetzt berechnen wir die gemittelte Energie-Dichte:

$$\langle \omega_{\rm em} \rangle = \frac{1}{16\pi} (\vec{E}_0 \vec{E}_0^* + \vec{B}_0 \vec{B}_0^*) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}_0 \vec{E}_0^*.$$
(3.89)

Die letzte Gleichung folgt aus $\vec{B}_0 = (\vec{k}/k) \times \vec{E}_0$. Für den Poynting-Vektor erhalten wir

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*\right) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\left(\vec{E}_0 \times \left[\left(\vec{k}/k\right) \times \vec{E}_0^*\right]\right) = \left\langle \omega_{\rm em} \right\rangle c \frac{\vec{k}}{k}.$$
(3.90)

Die Welle transportiert Energie mit Geschwindigkeit c in Richtung des Wellenvektors k.

3.7 Hohlraumwellen: Hohlraumresonatoren und Wellenleiter

Wir betrachten el/mag Wellen in einem Volumen, welches durch Metallwände begrenzt ist. Im inneren herrschen freie Maxwellgleichungen und am Rand muss man die Randbedingungen betrachten:

Bilder von Hohlraumresonatoren

Wir werden das Metall, als idealen Leiter betrachten. Das bedeutet, dass die Leitfähigkeit unendlich hoch ist, $\sigma \to \infty$. (Das Ohmsche Gesetzt lautet $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, wobei σ die Leitfähigkeit ist.) Die Ladungen können sich unendlich schnell bewegen (daher gilt $\vec{E} = 0$. Dies macht vorerst die Randbedingungen einfacher. Wir wollen jetzt eine an der Grenze des Metalls finden. Aus der Maxwell-Gl. $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und der Tatsache, dass \vec{B} endlich bleibt (nicht divergiert) folgt

$$\vec{E}_{\parallel}$$
 stetig $\Rightarrow \vec{E}_{\parallel}(\vec{r},t) = 0$ an der Grenzfläche. (3.91)

Die Randbedingungen für das B-Feld erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen. Für ein harmonisch oszillierendes $\vec{B} \propto e^{-i\omega t}$ gilt

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{B} \Rightarrow \vec{B}_{\perp} \equiv \vec{B} \cdot \vec{n} = 0.$$
(3.92)

Wir leiten die Wellengleichung für das E und B-Feld ab

$$\nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{=-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} + \underbrace{\nabla(\nabla \vec{E})}_{=0} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0$$
(3.93)

3.7.1 Quader-Hohlraum

Jetzt betrachten wir den Hohlraumresonator, $0 \le x \le L, \, 0 \le y \le L_2, \, 0 \le z \le L_3.$ Wir wählen einen Seperationsansatz für E_x

$$E_x(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = 0.$$
 (3.94)

Da alle vier Beiträge konstant sein müssen (die hängen nur von jeweils x, y, z, t ab), wählen wir $X''/X = -k_1^2$, $Y''/Y = -k_2^2$, $Z''/Z = -k_3^2$ und $T''/T = -\omega^2$. Darüber folgt, dass $\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$. Aus der Randbedingungen folgt: $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Wir setzen einen sin- und cos-Ansatz an.

$$X'' = -k_1^2 X = a \sin(k_1 x + \alpha_1) \equiv b \sin k_1 x + c \cos k_1 x \equiv d e^{ik_1 x} + f e^{-ik_1 x}.$$
 (3.95)

Darüber gilt

$$E_x = \operatorname{Re}\left[c_1\sin(k_1x + \alpha_1)\sin(k_2x + \alpha_2)\sin(k_3x + \alpha_3)e^{-i\omega x}\right].$$
(3.96)

Die Randbedingungen sagen nun aus $E_x = 0$ an y = 0, L_2 bzw. z = 0, L_3 . Daraus gilt $k_2 = m\pi/L_2, k_3 = n\pi/L_3$, mit $\alpha_1 = \alpha_2$.

$$E_x = \operatorname{Re}\left[c_1 \tilde{X}(x) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) e^{-i\omega x}\right].$$
(3.97)

Nun vollziehen wir dies für die y- und z-Komponente

$$E_y = c_2 \tilde{Y}(y) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) e^{-i\omega'x}$$
(3.98)

$$E_z = c_3 \tilde{Z}(z) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) e^{-i\omega''x}.$$
(3.99)

12.12.14

Wir nutzen, dass $\nabla \vec{E}=0$ inner halb des Quaders:

$$\nabla \vec{E} = c_1 \left(\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \ldots \right) + c_2 \left(\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y} \cdot \ldots \right) + c_3 \left(\frac{\mathrm{d}Z(z)}{\mathrm{d}z} \cdot \ldots \right). \tag{3.100}$$

Daraus folgt, dass $\omega=\omega'=\omega'', l=l', m=m', n=n'$ und

$$\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x} \propto \sin\frac{l\pi x}{L_1} \Rightarrow X(x) = \cos\frac{l\pi x}{L_1}.$$
(3.101)

Damit gilt für die allgemeine Lösung:

$$E_x = c_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) e^{-i\omega t}$$
(3.102)

$$E_y = c_2 \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) e^{-i\omega t}$$
(3.103)

$$E_z = c_3 \cos\left(\frac{n\pi z}{L_3}\right) \sin\left(\frac{mx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) e^{-i\omega t}.$$
(3.104)

Es gilt $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ (Maximal eine Komponente darf immer Null werden!). Nun können wir zudem die Kreisfrequenz berechnen:

$$\omega^{2} = c^{2}(k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2}), k_{1} = \frac{l\pi}{L_{1}}, k_{2} = \frac{m\pi}{L_{2}}, k_{3} = \frac{n\pi}{L_{3}} \Rightarrow \omega = \pi c \sqrt{\frac{l^{2}}{L_{1}^{2}} + \frac{m^{2}}{L_{2}^{2}} + \frac{n^{2}}{L_{3}^{2}}}.$$
 (3.105)

Wegen $\nabla \vec{E} = 0$ gilt zudem

$$c_1 \frac{l\pi}{L_1} + c_2 \frac{m\pi}{L_2} + c_3 \frac{n\pi}{L_3} = 0 \tag{3.106}$$

Zwei von den Cs können frei gewählt werden. Wir berechnen das B-Feld über die maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{B} \Rightarrow B_x = -\frac{ic}{\omega} \left(c_3 \frac{m\pi}{L_2} - c_2 \frac{n\pi}{L_3} \right) \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}.$$
 (3.107)

Diese Lösungen nennt man Eigenmoden (Eigenschwingungen) des Resonators. ω_{lmn} nennt man Eigenfrequenzen.

Bild von Eigenmoden (nur Abhänigkeit von z Komponente)

Die Wellen stehen (daher die Nullstellen bleiben fest).

3.7.2 Wellenleiter

Nun wollen wir einen Wellenleiter in z-Richtung betrachten, welcher unbegrenzt ist und rechteckig $0 \le x \le L_1$ und $0 \le y \le L_2$. Wir nutzen zur Lösung, denselben Seperationsansatz

$$Z(z) = e^{ikz} \tag{3.108}$$

Die restlichen Faktoren bleiben.

$$E_x = c_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
(3.109)

$$E_y = c_2 \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
(3.110)

$$E_z = c_3 \sin\left(\frac{mx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) e^{i(kz-\omega t)}.$$
(3.111)

Für die Kreisfrequenz gilt nun

$$\omega^2 = c^2 \left(\frac{\pi^2 l^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_2^2} + k^2 \right).$$
(3.112)

Zudem gilt dieselbe Randbedingung mit der Divergenz innerhalb des Wellenleiters:

$$c_1 \frac{l\pi}{L_1} + c_2 \frac{m\pi}{L_2} - ic_3 k = 0.$$
(3.113)

Das magnetische Feld können wir auch analog zum letzten Beispiel berechnen:

$$B_z = -\frac{c}{\omega} \left(-c_1 \frac{l\pi}{L_1} + c_2 \frac{m\pi}{L_2} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_1}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_2}\right) e^{i(kz - \omega t)} .$$
(3.114)

Für freie el/mag Wellen liegen TEM-Wellen (Transversal sowohl elektrisch als auch magnetisch) vor. Für einen Wellenleiter mit rechteckigen Querschnitt existieren solche TEM-Moden (Lösungen) nicht. Es existieren transversal Elektrische (TE) und transversal Magnetische (TM) Lösungen. In anderen Wellenleitern können auch TEM-Wellen geben.

Für TE-Wellen braucht man

$$E_z = 0 \Rightarrow c_3 = 0 . \tag{3.115}$$

Für TM-Wellen braucht man

$$B_z = 0 \Rightarrow c_2 \frac{l\pi}{L_1} - c_1 \frac{m\pi}{L_2} = 0 .$$
 (3.116)

Die beide Bedingungen können nicht gleichzeitig erfüllt werden:

$$B_z = 0 \Rightarrow c_2 \frac{l\pi}{L_1} - c_1 \frac{m\pi}{L_2} = 0, E_z = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_2 \frac{l\pi}{L_1} + c_1 \frac{m\pi}{L_2} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$
(3.117)

Wir betrachten nun zuerst die TE-Moden ($E_z = 0, B_z \neq 0$ für l = m = 0 nicht erlaubt, daher max. eine ist Null). Wir wollen die niedrigste Frequenz im Fall $L_1 > L_2$ betrachten, daher wählen wir (l, m) = (1, 0).

$$\omega \equiv \omega_{1,0} = c \sqrt{\frac{\pi^2}{L_1^2} + k^2} > \omega_{cr}, \ \omega_{cr} = \frac{c\pi}{L_1}.$$
(3.118)

Im Wellenleiter können sich keine Wellen mit $\omega \leq \omega_{cr}$ ausbreiten. Im freien Raum herrscht eine lineare Abhängigkeit zwischen ω und k, $\omega = ck$. Im Wellenleiter für die Mode (1,0) ist dies ein asymptotisches Verhalten für $k \gg \pi/L_1$. Für alle anderen Moden gilt

$$\omega \equiv \omega_{l,m} = c \sqrt{\frac{l^2 \pi^2}{L_1^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L_1^2} + k^2} . \qquad (3.119)$$

Für große k strebt diese gegen ck. Die TE-Moden gibt es für (lm) = (01), (lm) = (10) und für alle (l > 0 und m > 0). Die TM-Moden gibt es nur für (l > 0 und m > 0).

17.12.14

3.8 Green'sche Funktion der Wellengleichung, Retardierte Potentiale

Wir betrachten die Lorenz-Eichung. Die nicht-homogenen Maxwell-Gleichungen dann lauten:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{3.120}$$

Diese 4 Gleichungen haben die selbe Struktur der Wellengleichung:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f. \tag{3.121}$$

Dafür definieren wir die Green'sche Funktion G für Wellengleichung mit

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t').$$
(3.122)

Die Allgemeine Lösung der Wellengleichung (3.121) ist nun

$$\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' dt' G(\vec{r},t,\vec{r}',t') f(\vec{r}',t') + \Psi_0(\vec{r},t).$$
(3.123)

Dies sieht man, wenn man den Wellenoperator in Gleichung (3.121), auf die obere Gleichung (3.123) anwendet. Der Summand Ψ_0 löst den homogenen Teil der Wellengleichung. Jetzt Fourier-transformieren wir dies nach der Zeit:

$$\Psi(\vec{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tilde{\Psi}(\vec{r},\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad , \quad \tilde{\Psi}(\vec{r},\omega) = \int \mathrm{d}t \ \Psi(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{3.124}$$

Wir setzen dies in (3.121)

$$\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\Psi}(r,\omega) = -4\pi \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tilde{f}.$$
(3.125)

Die Transformierte Gleichung nennt man Helmoltzgleichung:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\Psi}(\vec{r},\omega) = -4\pi\tilde{f}(\vec{r},\omega).$$
(3.126)

Speziell in der Physik lässt man oft die Tilde weg und unterscheidet die normale und Fouriertransformierte über das Argument. Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung ist definiert dabei als

$$(\nabla_r^2 + k^2)G_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$
(3.127)

Hier ist $k \equiv \omega/c$. In Helmholz-Gleichung sowie in der Green-Funktion (3.127) ist k ein Parameter. Wir machen einen Ansatz $G_k(\vec{r}, \vec{r}') = G_k(R)$, wobei $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$. Wir betrachten zunächst $R \neq 0$:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(R) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R^2} [RG_k(R)] + k^2 [RG_k(R)] = 0.$$
 (3.128)

Die Lösung ist klar und lautet

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \Rightarrow G_k(R) = \frac{A}{R}e^{ikR} + \frac{B}{R}e^{-ikR}.$$
(3.129)

oder

$$G_k(R) = AG_k^+(R) + BG_k^-(R) \quad , \quad G_k^{\pm}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}.$$
 (3.130)

In der Nähe der Singularität $R \to 0$ gilt $kR \ll 1$ und

$$G_k^{\pm}(R) \xrightarrow[R \to 0]{} \frac{1}{R} \quad \text{oder} \quad \lim_{R \to 0} RG_k^{\pm}(R) = 1 .$$
 (3.131)

Aus $\nabla^2 \, \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{R})$ folgt

$$(\nabla^2 + k^2)G_k^{\pm} = -4\pi\delta(\vec{R})$$
 (3.132)

D.h., G_k^{\pm} sind beide die Green'sche Funktionen der Helmholz-Gleichung, sowie $G_k(R) = AG_k^+(R) + BG_k^-(R)$ mit A + B = 1.

Nun finden wir die Green-Funktion der Wellen-Gleichung. Wir betrachten wieder die Gleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t').$$
(3.133)

und führen die Fourier-Transformation bezüglich t durch. Das ergibt

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\vec{r}, \omega, \vec{r}', t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'}.$$
(3.134)

Hier $k = \omega/c$. Die Lösungen der Gleichung sind die oben eingeführten G_k^{\pm} , d.h.,

$$G^{\pm}(\vec{r},\omega,\vec{r}',t') = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}.$$
(3.135)

Damit ergibt sich durch die inverse Fourier-Transformation

$$G^{\pm}(\vec{r},t,\vec{r}',t') = \frac{\delta(t-t'\mp\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$
(3.136)

Damit ergibt sich weiterhin als Lösung der Wellengleichung:

$$\Psi = \int d^3 r' \, \frac{f(\vec{r}', t \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Psi_0 \tag{3.137}$$

 G^+ nennen wir retardierte Green'sche Funktion (wird normalerweise benutzt), sie entspricht der Kausalität, da $t' = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r'}| < t$. D.h., die Quelle im Ort $\vec{r'}$ erzeugt die Welle bevor die Welle im Ort \vec{r} beobachtet wird. Die Verzögerung beträgt $|\vec{r} - \vec{r'}|/c$. G^- heißt avancierte Green'sche Funktion. Die Retardierten Potentiale sind somit:

$$\varphi = \int d^3 r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{3.138}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$
(3.139)

Jetzt wollen wir das noch Analysieren. Wir wählen eine Quelle, die im Punkt \vec{r}' zur Zeit t' liegt. Jetzt fragen wir an welchen Punkten \vec{r} und t das Feld verursacht wird. Diese Punkte liegen an so genannten Lichtskegel $t - t' = \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Lichtkegel im vierdimensionalen Raum.

3.9 Strahlung

Als Quellen der Strahlung betrachten wir Ladungs- und Stromdichte, $\rho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$, die in ^{19.12.14} einem kleinen Bereich lokalisiert sind und wir wollen die Felder \vec{E} und \vec{B} außerhalb dieses Bereichs berechnen. Wir betrachten harmonisch oszillierende Quellen

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad , \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{3.140}$$

und erwarten, dass es sich harmonisch oszillierende Felder ergeben: $\vec{A} = \vec{A}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$, $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$, $\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Wir bestimmen erst das Vektor-Potential, denn damit lassen sich auch das magnetische und elektrische Feld zu finden. Für das Magnetfeld gilt $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Das elektrische Feld ergibt sich aus der Maxwell-Gl. $\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$. Da im Außenraum $\vec{j} = 0$, erhalten wir $\vec{E} = \frac{ic}{c} \nabla \times \vec{B}$. Diese formen wir weiter um

$$\vec{E} = \frac{ic}{\omega} \nabla \times \vec{B} = \frac{i}{k} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}).$$
(3.141)

Wir können \vec{A} mithilfe der retardierten Potentialen bestimmen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int d^3r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-i\omega t}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{A}_0 e^{-i\omega t}.$$
 (3.142)

Es ergibt sich also

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$
(3.143)

Wir nehmen an, dass die Ausdehnung der Quelle kleiner als die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ist. Das heisst es gilt $d \ll \lambda \Leftrightarrow kd \ll 2\pi$, wobei d ungefähr der Ausdehnung der Quelle ist.

Wir bezeichnen den Bereich der näher als λ zur Quelle liegt als **Nahzone** (statische Zone) und das Feld in diesem Bereich als **Nahfeld**.

Den Bereich der weiter als λ von der Quelle liegt nennen wir **Fernzone** (das Feld dort ist **Fern-feld**).

Wir wählen den Ursprung der Koordinaten im Bereich der Quelle.

3.9.1 Nahfeld

In der Nahzone gilt $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$. Daher erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{c} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,')e^{-i\omega t}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$
(3.144)

Daher spielen Retardierungseffekte hier keine Rolle. Dies entspricht der Formel aus der Magnetostatik (für jeden Zeitpunkt t). Dasselbe gilt auch für $\phi(\vec{r}, t)$. Die Felder und die Quellen sind zeitabhängig. Zu jedem Zeitpunkt können sie aber miteinander durch die statischen Formeln verknüpft werden. So eine Situation heisst Quasi-Statik.

3.9.2 Fernfeld

In der Fernzone gilt $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg \frac{2\pi}{k} \gg |\vec{r}'|$. Daher können wir $|\vec{r} - \vec{r}'|$ nach \vec{r}' entwickeln.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \vec{n}\vec{r}' + \dots, \qquad (3.145)$$

wobei $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$ und $r \equiv |\vec{r}|$. Wir entwickeln die folgende exakte Formel

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$
(3.146)

nach \vec{r}' und sammel
n die Terme die nicht schneller als 1/r abklingen. Man kann sich leicht überzeugen, dass nur in der Exponent $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ muss
es bis zur ersten Ordnung entwickelt werden. Das ergibt

$$\vec{A}_{0}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \underbrace{\int \mathrm{d}^{3}r' \, \vec{j}_{0}(\vec{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{r}'}}_{\equiv \vec{g}(k\vec{n})} + \mathcal{O}(1/r^{2}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \, \vec{g}(k\vec{n}) + \mathcal{O}(1/r^{2}). \tag{3.147}$$

Nun wollen wir die Felder berechnen:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_0(\vec{r}) = \nabla \times \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}g(k\vec{n})\right].$$
(3.148)

Wir wollen wieder nur die Beiträge behalten die nicht schneller als 1/r abklingen. Nun zeigen wir, dass bei einer Ableitung der führende Term aus dem Exponenten kommt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial r}}{r}\left(1 + \mathcal{O}(1/kr)\right). \tag{3.149}$$

Auch beim Ableiten von $g(k\vec{n})$ ergibt sich sicherlich einen weiteren Faktor 1/r. Wir müssen die Ableitung also nur auf die Exponent in (3.147) anwenden:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) \approx \frac{\nabla e^{ikr}}{cr} \times \vec{g}(k\vec{n}) + \mathcal{O}(1/r^2) = \frac{ike^{ikr}}{cr} \vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n}).$$
(3.150)

Daraus wollen wir nun das elektrische Feld berechnen. Es gilt $\vec{E}_0 = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}_0$. Wieder soll ∇ nur auf die Exponent e^{ikr} angewendet werden (sonst ergeben sich weitere 1/r Faktoren). Wir erhalten

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{g}) + \mathcal{O}(1/r^2), \qquad (3.151)$$

Es gilt damit

$$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}, \ \vec{E} \approx -\vec{n} \times \vec{B}, \ \vec{E}, \vec{B} \propto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}.$$
 (3.152)

Dies ist eine Kugelwelle. Lokal sieht sie aber als eine ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{n}$ aus.

3.10 Strahlungsleistung

Wir berechnen den zeitgemittelten Poyntingvektor

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle \operatorname{Re}\vec{E} \times \operatorname{Re}\vec{B} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\left(\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0\right) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\left(-(\vec{n} \times \vec{B}_0^*) \times \vec{B}_0\right)$$
(3.153)

$$= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\left(\vec{n} \left(\vec{B}_0 \vec{B}_0^*\right) - \vec{B}_0^* \left(\vec{n} \vec{B}_0\right)\right) = \frac{c}{8\pi} \vec{n} (\vec{B}_0^* \vec{B}_0)$$
(3.154)

$$= \frac{k^2 \vec{n}}{8\pi c r^2} \left| \vec{n} \times \vec{g} \right|^2 + \mathcal{O}(1/r^3).$$
(3.155)

Damit können wir die abgestrahlte Leistung in den Raumwinkel d Ω in Richtung \vec{n} berechnen:

$$\mathrm{d}P = \left\langle \vec{S} \right\rangle \vec{n}r^2 \mathrm{d}\Omega \tag{3.156}$$

Damit ergibt sich für $r \to \infty$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} \left| \vec{n} \times \vec{g} \right|^2 \tag{3.157}$$

Dies ist natürlich nicht von
r abhängig! Das Verhalten $E, B \propto 1/r$ ist charakteristisch für Strahlungsfelder. Es führt dazu, dass
 $\left\langle \vec{S} \right\rangle \propto 1/r^2$ und damit $\left\langle \vec{S} \right\rangle \vec{n}r^2$ im Lime
s $r \to \infty$ unabhängig von rist.

3.11 Multipolentwicklung

Wir führen nun eine Multipolentwicklung von $\vec{g}(k\vec{n})$ aus:

$$\vec{g}(k\vec{n}) = \int d^3r' \, \vec{j}_0(\vec{r}\,') e^{-ik\vec{n}\vec{r}\,'} = \int d^3r' \, \vec{j}_0(\vec{r}\,')(1 - ik\vec{n}\vec{r}\,' + \dots)$$
(3.158)

Diese Entwicklung ist gerechtfertigt den
n $k|\vec{r}\;'|\ll 1.$ Das ergibt

$$\vec{g}(k\vec{n}) = \vec{g}^{(0)} - ik\vec{g}^{(1)} + \dots ,$$
 (3.159)

wobei

$$\vec{g}^{(0)} = \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{j}_0(\vec{r}\,') \tag{3.160}$$

$$\vec{g}^{(1)} = \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{j}_0(\vec{r}')(\vec{n}\vec{r}') \tag{3.161}$$

Es fällt auf, dass $\vec{g}^{(0)}$ dem elektrischen Dipol entspricht, wobei $\vec{g}^{(1)}$ sowohl den Beitrag des magnetischen Dipols als auch den Beitrag des elektrischen Quadrupols beinhaltet. Es existiert kein elektrischer Monopolterm, da $\omega \neq 0$ ist (die gesamte elektrische Ladung der Quelle ist erhalten und kann nicht oszillieren).

3.12 Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

Wir betrachten hier den Dipol-Beitrag, d.h.,

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{g}^{(0)}.$$
(3.162)

Wir betrachten eine Komponente von $\vec{g}^{(0)}$

$$g_{j}^{(0)} = \int \mathrm{d}^{3}r' \, j_{0,j}(\vec{r}\,') = \int \mathrm{d}^{3}r' \, \sum_{k} j_{0,k}(\vec{r}\,') \nabla_{k}' r_{j}' = -\int \mathrm{d}^{3}r' \, \sum_{k} \left[\nabla_{k}' j_{0,k}(\vec{r}\,')\right] r_{j}' \tag{3.163}$$

$$= -i\omega \int d^{3}r' \rho_{0}(\vec{r}')r'_{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{g}^{(0)} = -i\omega \int d^{3}r' \rho_{0}(\vec{r}')\vec{r}' = -i\omega\vec{p}_{0}, \qquad (3.164)$$

Wobei \vec{p}_0 die Amplitude des oszillierenden Dipolmoment der Quelle ist. Wir haben hier die Kontinuitätsgleichung $\nabla \vec{j} + \partial \rho / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla \vec{j}_0 = -i\omega\rho_0$ benutzt. Damit folgt:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{g}^{(0)} = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}_0.$$
(3.165)

Für das Fernfeld erhalten wir damit

$$\vec{B}_{0}(\vec{r}) = -k^{2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}_{0}) \quad \vec{E}_{0} = -k^{2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}_{0})$$
(3.166)

Die abgestrahlte Leistung eines el. Dipols pro Raumwinkel ergibt sich als (dabei wollen wir die θ -Abhänigkeit der Strahlungsleistung berechnen):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} |\vec{n} \times \vec{g}^{(0)}|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{n} \times \vec{p}_0|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{p}_0|^2 \sin^2\theta.$$
(3.167)

Das Ergebnis wird in Abb. 3.2 gezeigt.

Die Gesamte abgestrahlte Leistung eines Dipols ergibt sich durch Integration

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{p}_0|^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sin^2\theta = \frac{\omega^4}{3c^3} |\vec{p}_0|^2$$
(3.168)



Abbildung 3.2: Strahlungsdiagramm eines Dipols



Abbildung 3.3: Kurze Dipol-Antenne

Elektrische Dipolstrahlung in der Nahzone

Nun wollen wir die elektrische Dipolstrahlung in der Nahzone betrachten. Dort gilt

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$
(3.169)

Die Multipolentwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ ergibt für den Dipol-Beitrag

$$\vec{A}_0(\vec{r}) \approx -\frac{\mathrm{i}k}{r} \vec{p}_0. \tag{3.170}$$

Darüber lassen sich E- und B-Feld berechnen

$$\vec{B}_0 = \nabla \times \vec{A}_0 = -ik\nabla \frac{1}{r} \times \vec{p}_0 = ik\frac{\vec{n} \times \vec{p}_0}{r^2}$$
(3.171)

$$\vec{E}_0 = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}_0 = -\nabla \times \left(\frac{\vec{n} \times \vec{p}_0}{r^2}\right) = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}_0) - \vec{p}_0}{r^3}.$$
(3.172)

Man sieht, dass das E-Feld, wesentlich größer ist, als das B-Feld, $|\vec{B}_0| \approx kr |\vec{E}_0| \ll |\vec{E}_0|$ (in der Nahzone $kr \ll 1$). Damit gilt im Nahfeld (nur da!):

$$|\vec{E}| \propto 1/r^3, |\vec{B}| \propto k/r^2 \Rightarrow |\vec{B}| \ll |\vec{E}|.$$
(3.173)

3.12.1 Kurze Dipolantenne

Wir betrachten als Beispiel eine kurze Dipolantenne (Abb. 3.3):

Wir legen die z-Achse in Richtung der Antenne. Die Länge der Antenne ist d ((0,0,d/2) bis (0,0,-d/2)). Für die kurze Antenne gilt $d \ll \lambda$, also $kd \ll 1$. Der eingespritzte Strom muss

maximal in der Mitte sein und muss an Endpunkten verschwinden. Für eine kurze Antenne ist die folgende lineare Näherung vernünftig (wir müssen die hier postulieren):

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d} \right) e^{-i\omega t} \Rightarrow \rho_0(z) = i \frac{2I_0}{\omega d} \operatorname{sgn} z.$$
(3.174)

Daraus berechnen wir das elektrische Dipolmoment

$$p_0 = \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}z \ z\rho_0(z) = \mathrm{i} \frac{I_0 d}{2\omega}$$
(3.175)

und daraus über die Winkelverteilung der Strahlung die gesamte abgestrahlte Leistung.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^2 I_0^2 d^2}{32\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{(I_0 k d)^2}{32\pi c} \sin^2 \theta \Rightarrow P = \frac{(I_0 k d)^2}{12c}.$$
(3.176)

Wir stellen jetzt die gesamte abgestrahlte Leistung als $P = \frac{1}{2}I_0^2 R_S$ dar, wobei $R_s = \frac{(kd)^2}{6c}$. Man kann R_s als Widerstand interpretieren, das von der Stromquelle, die den Strom $I_0 e^{-i\omega t}$ in die Antenne einspritzt, "erfahren" wird. Auf diesem "Widerstand" wird, wie üblich, die Leistung $P = \frac{1}{2}I_0^2 R_S$ dissipiert (1/2 wegen ac-Strom). Dabei wird R_s Strahlungswiderstand genannt (Widerstand: 1/c in Gauß-Einheiten entspricht 30Ω im SI, $R_s \approx (kd)^2 5\Omega$).

3.13 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

Nun betrachten wir $\vec{g}^{(1)}$, d.h. die magn. Dipol und el. Quadrupol Beiträge. Es gilt

$$\vec{g}^{(1)} = \int d^3 r' \left(\vec{n} \vec{r}' \right) \vec{j}_0(\vec{r}') . \qquad (3.177)$$

Wir betrachten die p-te Komponente

$$g_p^{(1)} = \sum_l n_l \int d^3r' \ r_l' j_{0,p} = \sum_l n_l \int d^3r' \ \left[\frac{j_{0,p} r_l' - j_{0,l} r_p'}{2} + \frac{j_{0,p} r_l' + j_{0,l} r_p'}{2} \right].$$
(3.178)

Der erste Term ergibt

$$\sum_{l} n_{l} \int d^{3}r' \left[\frac{j_{0,p}r_{l}' - j_{0,l}r_{p}'}{2} \right] = -c(\vec{n} \times \vec{m}_{0})_{p}, \text{ mit } \vec{m}_{0} = \frac{1}{2c} \int d^{3}r \, \vec{r} \times \vec{j}_{0}.$$
(3.179)

Hier \vec{m}_0 ist die Amplitude des oszillierenden magnetischen Dipols. Der zweite Term lässt sich wie folgt umformen

$$\sum_{l} n_{l} \int d^{3}r' \, \frac{j_{0,p}r_{l}' + j_{0,l}r_{p}'}{2} = \sum_{l} n_{l} \int d^{3}r' \, \frac{\sum_{q} j_{0,q} \nabla_{q}'(r_{l}'r_{p}')}{2}$$
(3.180)

$$\stackrel{part.Int.}{=} -\sum_{l} n_l \int \mathrm{d}^3 r' \frac{r'_l r'_p}{2} \sum_{q} \nabla_q j_{0,q}$$
(3.181)

$$\stackrel{\text{Kont.-Gl.}}{=} -\sum_{l} n_l \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{r_l' r_p'}{2} \mathrm{i}\omega \rho_0 \tag{3.182}$$

$$= \sum_{l} \frac{-\mathrm{i}\omega n_{l}}{6} \left[Q_{0,lp} + \delta_{lp} \int \mathrm{d}^{3}r' \ (r')^{2} \rho_{0}(\vec{r}\,') \right].$$
(3.183)

Dabei ist $Q_{0,lp}$ das elektrische Quadrupolmoment:

$$Q_{0,lp} = \int d^3 r' \rho_0(\vec{r}') (3r'_p r'_l - (r')^2 \delta_{lp})$$
(3.184)

Es ergibt sich also

$$\vec{g}^{(1)} = -c\vec{n} \times \vec{m}_0 - \frac{i\omega}{6} \sum_{lp} n_l Q_{0,lp} \vec{e}_\rho - \frac{i\omega}{6} \vec{n} \int d^3 r' \ (r')^2 \rho_0 \tag{3.185}$$

Der letzte Term spielt keine Rolle, da $\nabla\times(\vec{n}F(r))=0$ und keine Beiträge zu E- und B-Felder entstehen. Wir berechnen nun das B- und E-Feld

$$\vec{B}_0^{(1)} = \nabla \times \vec{A}_0^{(0)} \approx \frac{k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \vec{n} \times \vec{g}^{(1)} \text{ Fernzone.}$$
(3.186)

und

$$\vec{E}_0^{(1)} = -\vec{n} \times \vec{B}_0^{(1)}. \tag{3.187}$$

Damit gilt für die magnetische Dipolstrahlung

$$\vec{g}^{(1,\text{mag})} = -c\vec{n} \times \vec{m}_0$$
 (3.188)

Daraus folgt:

$$\vec{B}_{0}^{(1,\text{mag})} = -\frac{k^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} (\vec{n} \times (\vec{n} \times m_{0})) \quad , \quad \vec{E}_{0}^{(1,\text{mag})} = -\frac{k^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \vec{n} \times \vec{m}_{0}.$$
(3.189)

Dies entspricht den Formeln für das elektrische Dipolmoment (Gl. 3.166), wobei \vec{E} und \vec{B} vertauscht werden. Damit können wir die gleiche Formeln für die Leistung benutzen.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{m}_0|^2 \sin^2\theta \Rightarrow P = \frac{\omega^4}{3c^3} |\vec{m}_0|^2.$$
(3.190)

Wir betrachten als Beispiel eine einfache Stromschleife mit Fläche A. In die Schleife wird der Strom $I = I_0 e^{-i\omega t}$ eingespritzt. Damit $m_0 = I_0 A/c$.

$$P = \frac{\omega^4}{3c^3} \frac{I_0^2 A^2}{c^2} = \frac{k^4 A^2 I_0^2}{3c} = \frac{1}{2} I_0^2 R_S, R_S = \frac{2}{3} \frac{k^4 A^2}{c} \Rightarrow 20 \,\Omega \cdot (k^2 A)^2.$$
(3.191)

4 Elektrodynamik in Materie

4.1 Makroskopische Maxwell-Gleichungen

In Zukunft werden wir mikrospkopische Felder mit kleinen Buchstaben beschreiben:

$$\nabla \vec{b} = 0 \quad \nabla \times \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

$$\nabla \vec{e} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \vec{b} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
(4.2)

Es gilt also: Mikroskopische Felder: \vec{e}, \vec{b} , mikroskopische Ladungs/Stromdichten: ρ, \vec{j} . Wir wollen über mikroskopischen Schwankungen mitteln. Die charakteristische Längenskala der mikroskopischen Schwankungen von atomaren Ladungen wird a benannt, $a \sim 10^{-10}$ m.

Für das Mitteln benutzen wir eine Funktion $f(\vec{r})$ für die gilt:

- $\int \mathrm{d}^3 r f(\vec{r}) = 1$
- $f(\vec{r})$, in einem Bereich mit charakteristische Abmessung b in Umgebung von $\vec{r} = 0$ lokalisiert und glatt
- $a \ll b \ll \lambda$

Ein gutes Beispiel dafür ist die Gauß'sche Funktion:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}b^3} e^{-r^2/b^2}.$$
(4.3)

Wir realisierung die Mittelung durch eine Faltung:

$$F(\vec{r},t) \to \langle F \rangle \left(\vec{r},t\right) = \int \mathrm{d}^3 r' \ F(\vec{r}\,',t) f(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{4.4}$$

Damit erhalten wir dann die makroskopischen Größen über

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}, \left\langle \vec{b} \right\rangle = \vec{B}.$$
 (4.5)

Wir können nun die Maxwell-Gleichungen schreiben als:

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.6}$$

$$\nabla \vec{E} = 4\pi \left\langle \rho \right\rangle \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left\langle \vec{j} \right\rangle \tag{4.7}$$

Nun müssen wir die restlichen gemittelten Größen bestimmen. Wir betrachten die Ladungensdichte

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) + \rho_{\text{geb}}(\vec{r}). \tag{4.8}$$

Diese setzt sich aus freien und gebunden Ladungsträger (letztere entstehen durch Polarisation der Materie) zusammen. Ein beispiel für letztere sind sich verschiebende Elektronenwolken (gegenüber Kernen) oder bereits existierende Dipole von Molekülen. Es gilt

$$\langle \rho_{\rm geb} \rangle (\vec{r}) = \int d^3 r' f(\vec{r} - \vec{r}') \sum_k \sum_{j(u)} q_j \delta(\vec{r}' - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj})),$$
 (4.9)

wobei $\vec{r_n}$ die Koordinate der Mitte der Moleküle ist und \vec{a}_{nj} die Verschiebung der Ladung \vec{j} in der Molekül n bezüglich $\vec{r_n}$ ist. Daraus ergibt sich

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle \left(\vec{r} \right) = \sum_{k} \sum_{j(u)} q_j f(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj})$$

$$\tag{4.10}$$

was wir entwickeln können, denn $|\vec{a}_{nj}| \ll b$:

$$\langle \rho_{\rm geb} \rangle (\vec{r}) = \sum_{k} \sum_{j(u)} q_j \left(f(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{a}_{nj} \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \ldots \right).$$
 (4.11)

Wir summieren über j, d.h., über die verschiedenen Ladungen einer Molekül. Das ergibt

$$\langle \rho_{\rm geb} \rangle (\vec{r}) = \sum_{n} q_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) - \sum_{n} \vec{p}_n \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots , \qquad (4.12)$$

wobei $q_n = \sum_{j(n)} q_j$ die Gesamtladung der Molekül n und \vec{p}_n das gesamte Dipolmoment der Molekül n sind. Wir vernachlässigen alle weiteren Terme.

Der erste Summand muss 0 sein, denn die Moleküle neutral sind. Dann bleibt der Dipol-Term

$$\left\langle \rho_{\text{geb}} \right\rangle(\vec{r}) = -\sum_{n} \vec{p}_{n} \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_{n}) = -\nabla_{r} \sum_{n} \vec{p}_{n} f(\vec{r} - \vec{r}_{n}) = -\nabla \vec{P}(\vec{r}).$$
(4.13)

Der Vektor $\vec{P} = \sum_{n} \vec{p}_{n} f(\vec{r} - \vec{r}_{n})$ ist dabei die gemittelte elektrische Dipolmoment
dichte bzw. die elektrische Polarisation.

$$\langle \rho \rangle = \rho_{\rm frei} + \langle \rho_{\rm geb} \rangle = \rho_{\rm frei} - \nabla \vec{P}.$$
 (4.14)

Nun gilt

$$\nabla \vec{E} = 4\pi \left\langle \rho \right\rangle = 4\pi \left(\rho_{\text{frei}} - \nabla \vec{P} \right) \,. \tag{4.15}$$

Wir führen ein neues Feld an: $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P}$. Das ist das Verschiebungsfeld. Dann gilt

$$\nabla \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{frei}}.\tag{4.16}$$

Wir wollen nun eine Ähnliche Betrachtung bei der Stromdichte durchführen

$$\left\langle \vec{j}_{\text{geb}} \right\rangle (\vec{r}) = \sum_{k} \sum_{j(u)} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} \left(f(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{a}_{nj} \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \ldots \right).$$
 (4.17)

Wir betrachten den ersten Term

$$\sum_{n} \sum_{j(n)} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n} \vec{p}_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \frac{\partial P}{\partial t}$$
(4.18)

Der zweite Term ist etwas schwieriger in der Auswertung:

$$-\sum_{n}\sum_{j(n)} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} \left(\vec{a}_{nj} \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) \right) = \dots$$
(4.19)

 mit

$$\dot{a}_i(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \sum_l \dot{a}_i a_l b_l = \frac{1}{2} \sum_l (\dot{a}_i a_l + \dot{a}_l a_i) b_l + \frac{1}{2} \sum_l (\dot{a}_i a_l - \dot{a}_l a_i) b_l$$
(4.20)

$$=\frac{1}{2}\sum_{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{l}a_{i})\right]b_{l}+\frac{1}{2}\sum_{lk}\left[\dot{\vec{a}}\times\vec{a}\right]_{k}\epsilon_{ilk}b_{l}$$
(4.21)

ergibt sich

$$\dots = \frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{j(n)} q_j \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) \times (\vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_n) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n} \sum_{j(n)} q_j \vec{a}_n \left[\vec{a}_n \cdot \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) \right].$$
(4.22)

Den letzteren können wir Vernachlässigen (el. Quadrupolterm). Wir führen die Magnetisierung ein:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \sum_{n} \sum_{j(n)} q_j f(\vec{r} - \vec{r}_n) \vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj} = \left\langle \sum_{n} \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle$$
(4.23)

,

und

$$\vec{m}_n = \frac{1}{2c} \sum_{j(n)} q_j \vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj}.$$
 (4.24)

Denn \vec{m}_n das magnetische Dipolmoment der Molekül ist, ist die magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ die gemittelte mag. Dipolmomentdichte.

Es hat sich also die folgende Relation ergeben

$$\left\langle \vec{j}_{\text{geb}} \right\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\nabla \times \vec{M}$$
(4.25)

Damit ergibt sich für die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left\langle \vec{j} \right\rangle = \frac{4\pi}{c} \left[j_{\text{frei}} + \langle j_{\text{geb}} \rangle \right] = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\nabla \times \vec{M} \right) \tag{4.26}$$

Die neue Magnetfeld \vec{H} ist definiert durch

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}. \tag{4.27}$$

Wir können nun die makrospkopischen Maxwell-Gleichungen aufschreiben

$$\nabla \vec{B} = 0$$
, $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (4.28)

$$\nabla \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{frei}} , \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}}.$$
(4.29)

Dies wollen wir jetzt etwas vereinfachen. Wir definieren freie, markoskopische Ladungsdichte

$$\rho_{\rm makr} = \rho_{\rm frei} = \rho = \rho_{\rm ext},\tag{4.30}$$

die Polarisationsladung

$$\langle \rho_{\rm geb} \rangle = \rho_{\rm pol}$$
(4.31)

und die Gesamtdichte

$$\rho_{\rm tot} = \rho + \rho_{\rm pol} \tag{4.32}$$

um.

Jetzt lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \vec{B} = 0$$
, $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (4.33)

$$\nabla \vec{D} = 4\pi\rho , \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$
(4.34)

Denn die homogenen Gleichungen haben sich nicht geändert, können wir wieder das Skalar- und das Vektor-Potential einführen durch

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

Jedoch brauchen wir, um die inhomogenen Gleichungen lösen zu können, Informationen über den Zusammenhang zwischen \vec{E} und \vec{D} , sowie \vec{B} und \vec{H} .

4.2 Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permeabilität

Für viele Substanzen gelten in schwachen Feldern linieare Zusammenhänge zwischen Polarisation ^{09.01.15} und Magnetisierung und E-Feld und H-Feld:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad , \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{4.35}$$

Man bezeichnet χ_e elektrische und χ_m magnetische Suszeptibilität. Zur Vereinfachung nehmen wir Isotropie (also normale Skalare und keine Tensoren) und nicht ferromagnetische und ferroelektrische Materialien an. Somit gilt

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$
(4.36)

und

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}.$$
(4.37)

Die Größe ϵ heißt Dielektriziätskonstante, die Größe μ heißt magnetische Permeabilität. Im allgemeinen sind sie von der Frequenz und dem Wellevektor abhängig. Im Moment betrachten wir ϵ und μ als Konstanten. Beispielsweise gilt für Wasser bei 20 °C liegt ϵ bei 80 und μ bei 0,999992. Für übliche (nicht ferromagnetische) Materialien ist $|\chi_m| \ll 1$. Materialen für die gilt $\chi_m > 0$ heißen paramagnetisch und Materialien für die gilt $\chi_m < 0$ diamagnetische.

4.3 Energiebilanz

Dies geschieht Analog zum letzten Kapitel:

$$\vec{H} \cdot \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right], \quad -\vec{E} \cdot \left[\nabla \times \vec{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right].$$
(4.38)

Wir addieren beide Terme:

$$\frac{1}{c}\left(\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} - \vec{H}\left(\nabla \times \vec{E}\right) + \vec{E}\left(\nabla \times \vec{H}\right).$$
(4.39)

Daher ist der Poyntingvektor gleich (Vektoridentität ausnutzen!)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}.$$
(4.40)

Dabei ist

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3 r \vec{j} \vec{E}.$$
(4.41)

die Arbeit die von el/mag. Feldern geleistet wird (Änderung der Energie der freien Ladungen). Der erste Term bezeichnet die Energiedichteänderung des el/mag. Feldes. Insgesamt gilt

$$\frac{\partial \omega_{\rm em}}{\partial t} + \nabla \vec{S} = -\vec{j}\vec{E}.$$
(4.42)

Hier für die Energiedichte des e.m. Feldes $\omega_{\rm em}$ gilt

$$\frac{\partial \omega_{\rm em}}{\partial t} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$
(4.43)

Wir können ω_{em} noch umschreiben (das ist aber nicht allgemein, nur falls ϵ und μ konstant sind):

$$\frac{\partial\omega_{\rm em}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial 1}{\partial t} \left(\mu \vec{H}^2 + \epsilon \vec{E}^2 \right) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial 1}{\partial t} \left(\vec{H} \vec{B} + \vec{E} \vec{D} \right)$$
(4.44)

Damit gilt

$$\omega_{\rm em} = \frac{1}{8\pi} \left(\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D} \right) \tag{4.45}$$

4.4 Randbedingungen

Wir betrachten eine Randfläche zwischen zwei Medien (M1 (ϵ_1, μ_1), M2 (ϵ_2, μ_2))

Bild einer Randfläche, Normalenvektor, Grenzfläche, Flächenladungsdichte etc...

Wir schauen zuerst auf die Seite der Grenzfläche und legen ein gauß'sches Kästchen mitten hinein, über $\nabla \vec{D} = 4\pi\rho$ gilt

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = 4\pi\sigma \Leftrightarrow \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma.$$
(4.46)

Jetzt betrachten wir eine Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (keine externen Ladungen, metallische Schicht). Dann wäre $\sigma = 0$ und die Normalkomponente stetig. Jetzt legen wir eine Kontur an den Rand der Grenzfläche über $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ gilt

$$\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel} \Leftrightarrow \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \tag{4.47}$$

Nun legen wir wieder ein Gauß'sches Kästchen an die Randfläche betrachten aber das B-Feld $(\nabla \vec{B}=0)$

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \Leftrightarrow \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \vec{n} = 0.$$
(4.48)



Abbildung 4.1: Bild eines Platten-Kondensators mit Fläche A, Ladung Q und Dielektrikum, welches nicht den gesamten Innenraum ausfüllt.

Die letzte Randbedingung erhalten wir über die übrige Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$. Wir betrachten wieder die Kontur und erhalten

$$\vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}.$$
(4.49)

An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika gibt es keine freien Ladungen, damit gilt in diesem Fall:

$$\vec{H}_{2\parallel} = \vec{H}_{1\parallel}.\tag{4.50}$$

4.5 Elektrostatik in Materialien

Wir betrachten

$$\nabla \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla \left(\epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\right) = 4\pi\rho.$$
(4.51)

Wenn ϵ konstant ist (unabhängig von $\vec{r})$ bekommt man

$$\nabla \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}.$$
(4.52)

Wir betrachten eine Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (ϵ_1, ϵ_2). Dies stellt eine typische Situation dar. Ein spezialfall davon ist $\epsilon_1 = 1$ (Vakuum). Die Lösungstrategie dabei ist: die Gleichung (4.52) in beiden Bereichen entsprechend lösen und die Randbedingungen an den Grenzflächen anwenden. Da $\nabla \times \vec{E}$ im gesamten Raum gilt, gibt es ein Potential φ , welches stetig an der Grenzfläche ist.

4.5.1 Dielektrikum im Kondensator

Wir betrachten einen Kondensator wie in Abb. 4.1. Alle Felder hier sind entlang z-Achse ausgerichtet, d.h., $\vec{D} = D(z)\vec{e}_z$, $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$, $\vec{P} = P(z)\vec{e}_z$. Außerhalb des Kondensators (|z| > d/2) ist $\vec{D} = 0$. Für |z| < d/2 gilt $\nabla \vec{D} = 0$ (Da \vec{D} nur die freien Ladungen erfasst ist dies überall im Innen des Kondensators gleich groß.). Es folgt daraus $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$, D(z) = const. Über die Randbedingungen an den beiden Platten gilt $D = 4\pi\sigma = 4\pi Q/A$. Hier $\sigma = Q/A$ ist die Ladungsdichte auf der unteren Platte. Daraus können wir E und P finden:

$$E = \begin{cases} D \\ D/\epsilon \end{cases} P = \begin{cases} 0 \text{ Vakuum} \\ \frac{1}{4\pi}(D-E) = \frac{1}{4\pi}\frac{\epsilon-1}{\epsilon}D \text{ Dielektrikum} \end{cases}$$
(4.53)

14.01.15

Nun wollen wir die Kapazität des Kondensators berechnen. Dazu berechnen wir zuerst die Spannung

$$U \equiv \varphi(-d/2) - \varphi(d/2) = \int_{-d/2}^{d/2} E \, \mathrm{d}z = \frac{Db}{\epsilon} + D(d-b) = \left(\frac{b}{\epsilon} + (d-b)\right) \cdot 4\pi \frac{Q}{A} \equiv C^{-1}Q \quad (4.54)$$

daraus folgt

$$C = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{b/\epsilon + (d-b)} .$$
 (4.55)

Betrachten wir nun den Fall b = d (Kondensator völlig vom Dielektrikum ausgefüllt). Dann gilt

$$C = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon A}{d} = \epsilon C_0 , \qquad (4.56)$$

wobe
i $C_0 = A/(4\pi d)$ die Kapazität ohne Dielektrikum (im Vakuum) ist. Im allgemeinen Fall(b < d)gilt dann

$$C = C_0 \cdot \frac{d}{b/\epsilon + (b-d)}$$
(4.57)

wobei $C_0 = A/(4\pi d)$ die Kapazität im Vakuum ist $(C = \epsilon C_0)$.

Nächst betrachten wir die Grenzfläche zwischen Vakuum und Dielektrikum (z.B. die untere). Die Polarisierung \vec{P} ist nicht stetig. Es gilt

$$\nabla \vec{P} = -\langle \rho_{\rm geb} \rangle \Rightarrow \sigma_{\rm pol} = -(\vec{P}_{\rm diel} - \vec{P}_{\rm vak})\vec{n} , \qquad (4.58)$$

wobei σ_{pol} die Polarisationsflächenladungsdichte unteren Grenzfläche ist (siehe Abb. 4.1). Jetzt können wir σ_{pol} berechnen:

$$\sigma_{\rm pol} = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{D}{4\pi} = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma , \qquad (4.59)$$

Dies ist auf den Grenzflächen vorzufinden. Sie entsteht durch eine Verschiebung der gebundenen Elektronen und Protonen. Es ist also ein Atomarer Abstand (Schicht) an den Grenzflächen (eine negativ, eine positiv). Deswegen ist im Dielektrikum keine Ladungsdichte, sondern nur an den Rändern.

Nun betrachten wir den Grenzfall $\epsilon \to \infty$. Dann folgt $\sigma_{\text{pol}} \to -\sigma$ und $E \to 0$. Dies wäre gleich dem Fall wie bei einem Metall. Daher eine Vollständige Abschirmung.

4.5.2 Punktladung und Dielektrikum

Wir betrachten eine Punktladung mit Lotabstand a zu einem unendlichen Dielektrikum mit $\epsilon > 1$. Wir legen die Punktladung auf die x-Achse und das Dielektrikum orthogonal dazu. Es gilt im Vakuum

$$\vec{D} = \vec{E} \Rightarrow \nabla \vec{E} = 4\pi q \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x). \tag{4.60}$$

Innerhalb des Dielektrikums gilt

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \nabla(\epsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \vec{E} = 0.$$
(4.61)

Die Randbedingungen (x = 0) lauten: $\vec{E}_{\parallel,V} = \vec{E}_{\parallel,D}$; $E_{\perp,V} = \epsilon E_{\perp,D}$. Dieses Problem können wir mit Bildladungen bestimmen. Für das Feld im Vakuum legen wir eine Spiegelladung q' an die Position (-a, 0, 0). Für das Feld im Dielektrikum benutzen wir eine Ladung q'' an der Position (a, 0, 0). D.h.,

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \begin{cases} q \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} + q' \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} & x > 0(\mathbf{V}) \\ q'' \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} & x < 0(\mathbf{D}) \end{cases}$$
(4.62)

Die Werte von q' und q'' lassen sich durch die Randbedingungen bestimmen. Zuerst betrachten wir die *y*-Komponente des E-Feldes an der Grenzfläche, d.h., für x = 0:

$$q\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} + q'\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} = q''\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow q+q' = q''.$$
(4.63)

Das gleiche gilt für die z-Komponente. Nun Betrachten wir die orthogonale x-Komponente ($E_{\rm V} = \epsilon E_{\rm D}$):

$$q\frac{-a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} + q'\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\epsilon q''\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow q - q' = \epsilon q''.$$
(4.64)

Daraus ergibt sich

$$q' = -q\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \quad , \quad q'' = \frac{2q}{\epsilon + 1} \tag{4.65}$$

Nun betrachten wir wieder die Grenzfälle

- $\epsilon=1 \Rightarrow q'=0, q''=q,$ überall im Raum das Vektorfeld der Punktladung
- $\epsilon = \infty \Rightarrow q' = -q, q'' = 0$, wie bei einem Metall, kein elektrisches Feld im Dielektrikum.

Die Linien des E-Feldes werden beim Übergang ins Dielektrikum gekrümmt.

4.5.3 Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

Es gebe ein homogenes äußeres (angelegtes) elektrisches Feld \vec{E}_0 und eine Kugel mit der dielektrischen Konstante ϵ und dem Radius R. Für sehr große Abstände gilt natürlich für das resultierende elektrische Feld $\vec{E}(r \gg R) = \vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$. Weil $\nabla \times \vec{E} = 0$ gilt $\vec{E} = -\nabla \phi$, zudem gilt $\nabla \vec{D} = 0$ und damit

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{E}, r > R(\mathbf{V}) \\ \epsilon \vec{E}, r < R(\mathbf{D}) \end{cases}$$
(4.66)

Wir versuchen die Laplacegleichung ($\nabla^2 \phi = 0$) für die zwei Bereiche zu lösen:

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-r-1}) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi).$$
(4.67)

In diesem Abschnitt bezeichnen wir das Skalar
potential mit ϕ und den Winkel in sphärischen Koordinaten mit
 $\varphi.$

Wegen der axialen Symmetrie gilt die Vereinfachung

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_{l0}r^l + B_{l0}r^{-l-1}) \cdot Y_{l0}(\theta)$$
(4.68)

mit $Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \ (P_l(x) \text{ sind die Legendre-Polinome}).$

Im Innenraum müssen alle Koeffizienten B_{l0} verschwinden, denn sonst würde $\phi(\vec{r})$ für $\vec{r} \to 0$ divergieren. Es gilt nun (r < R)

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \qquad (4.69)$$

im Außenraum hingegen (r > R)

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta).$$
(4.70)

Wir analysieren die erste Randbedingung bei $r=\infty$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \Rightarrow \phi = -E_0 z \equiv -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta) , \qquad (4.71)$$

 $(P_1(x) = x)$. Damit gilt $B_1 = -E_0$ und $B_l = 0$ für $l \neq 1$. Nun analysieren wir die Randbedingungen bei r = R.

- 1. \vec{E}_{\parallel} stetig $\Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{r=R+0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{r=R-0}$
- 2. ϕ stetig $\Rightarrow \phi|_{r=R+0} = \phi|_{r=R-0}$
- 3. \vec{D}_{\perp} stetig $\Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R+0} = \epsilon \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R-0}$

Aus (2) folgt $RA_1 = -RE_0 + C_1/R^2$ für l = 1 und

$$R^l A_l = \frac{C_l}{R^{l+1}}$$

für $l \neq 1$. Aus (3) folgt $\epsilon A_1 = -E_0 - 2C_1/R^3$ für l = 1 und

$$\epsilon l R^{l-1} A_l = -(l+1) \frac{C_l}{R^{l+2}}$$

Die beiden Bedingungen für $l \neq 1$ ergeben nur die triviale Lösung $A_l = 0$ und $C_l = 0$. Damit bleiben wir ausschliesslich mit l = 1 und müssen noch A_1 und C_1 bestimmen. Wir erhalten

$$A_1 = -E_0 \frac{3}{\epsilon + 2}$$
 , $C_1 = R^3 E_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$

Damit folgt für das innere Feld

$$\phi = -\frac{3}{\epsilon+2}E_0 r\cos\theta \equiv -\frac{3}{\epsilon+2}\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$
(4.72)

und für das äußere Feld

$$\phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\theta \equiv -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r^3}.$$
(4.73)

Innerhalb der Kugel ist somit das Elektrische Feld

$$\vec{E}_i = \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 , \qquad (4.74)$$

und die Polarisation ist damit

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0.$$
(4.75)

Diese ist homogen über das ganze Volumen der Kugel verteilt. Das Dipolmoment der Kugel kann jetzt darüber bestimmt werden. Es gilt

$$\vec{p} = V \cdot \vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \vec{E}_0.$$
(4.76)

Bild einer Kugel mit und ohne Flächenladungsdichte.

Jetzt betrachten wir den Außenbereich der Kugel. Wir beobachten aus (4.73), dass es gilt

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \vec{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad , \quad \vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \vec{E}_0. \tag{4.77}$$

Wir sehen, dass sich dies aus dem äußeren Feld und dem Feld eines Dipols in der mitte der Kugel zusammensetzt.

4.6 Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell

Wir betrachten schwache Felder in homogener Materie und untersuchen die Polarisation. Im allgemeinem gilt die lineare Antwort:

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \int d^3r' dt' \ \chi_e(\vec{r}-\vec{r}',t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}',t').$$
(4.78)

Das χ_e ist die elektrische Suszeptibilität. Hier wird das elektrische Feld im Ort \vec{r}' zur Zeit t', d.h., $\vec{E}(\vec{r}',t')$, als (schwache) Störung betrachten die die Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t)$ verursacht. Die Suszeptibilität χ_e hängt nur von $\vec{r} - \vec{r}'$ ab, weil die Materie homogen ist. Die Suszeptibilität χ_e hängt nur von t - t' ab, weil die Zeit homogen ist.

Das Integral in (4.78) können wir nun Fouriertransformieren. Es handelt sich um eine Faltung und es gilt

$$\vec{P}(\vec{k},\omega) = \chi_e(\vec{k},\omega) \cdot \vec{E}(\vec{k},\omega).$$
(4.79)

Jetzt betrachten wir die dielektrische Verschiebung \vec{D}

$$\vec{D}(\vec{k},\omega) = \vec{E}(\vec{k},\omega) + 4\pi \vec{P}(\vec{k},\omega) = \left[1 + 4\pi\chi(\vec{k},\omega)\right]\vec{E}(\vec{k},\omega) = \epsilon(\vec{k},\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega).$$
(4.80)

Damit haben wir die dielektrische Funktion $\epsilon(\vec{k}, t)$ definiert.

4.6.1 Lorentz-Model

Nun betrachten wir ein Modell, welches die lineare Antwort näher beschreibt. Wir betrachten die Elektronen und Kerne des Materials. Die Elektronen sind verschiebbar und wir wollen die Bindung zwischen Kern und Elektron als harmonischer Oszillator modellieren. Die Verschiebung des Elektrons heisst \vec{a} . Die Bewegungsgleichung lautet

$$m(\ddot{\vec{a}} + \gamma \dot{\vec{a}} + \omega_0^2 \vec{a}) = \vec{F}(t) .$$
(4.81)

Dabei ist γ der Reibungskoeffizient der die Dämpfung (Energieverluste) beschreibt. Die auf das Elektron wirkende Kraft wird mit $\vec{F}(t) = q\vec{E}(t)$ bezeichnet. Als Störung betrachten wir das elektrische Feld einer ebenen Welle: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$. Als Ursprung der Koordinaten können wir den Ort des Kerns annehmen. Dann gilt $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{a}-\omega t)}$. Wir nehmen an, dass die Wellenlänge viel größer als $|\vec{a}|$ ist ($|\vec{a}| \sim$ Abstand zwischen Atomen). Dann gilt $\vec{E} \approx \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ und die Bewegungsgleichung lautet

$$m(\ddot{\vec{a}} + \gamma \dot{\vec{a}} + \omega_0^2 \vec{a}) = q \vec{E}_0 e^{-i\omega t} .$$
(4.82)

Die Lösung wird in der folgenden Form gesucht: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 e^{-i\omega t}$. Dies setzen wir in die DGL ein:

$$m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)\vec{a}_0 = q\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{qE_0}{m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)}.$$
(4.83)

Dies können wir zur Bestimmung des Dipolmoment nutzen

$$\vec{p}(t) = q\vec{a}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}, \text{ mit } \vec{p}_0 = \frac{q^2 \vec{E}_0}{m(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)}$$
(4.84)

oder

$$\vec{p}_0 = \alpha_e(\omega)\vec{E}_0$$
 , $\alpha_e(\omega) = \frac{q^2\vec{E}_0}{m(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)}$, (4.85)

wobei $\alpha_e(\omega)$ heisst die elektrische Polarisierbarkeit des Oszillators. Nächst berechnen wir die Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t) = \sum \vec{p}_k(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_k)$. Hierbei zählt der Index k die Oszillatoren (z.B. Atome) die sich in den Orten \vec{r}_k befinden. Es ergibt sich $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_0(r)e^{-i\omega t}$ mit

$$\vec{P}_0(\vec{r}) = \left\langle \sum_k \frac{q_k^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)}{m_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_k)} \right\rangle \vec{E}_0(\vec{r}).$$
(4.86)

Hierbei bedeutet $\langle \dots \rangle$ das Mitteln mithilfe der Funktion $f(\vec{r})$ (Das elektrische Feld ist schon eine langsam variierende Funktion und muss nicht gemittelt werden). Das ergibt

$$\vec{P}_0(\vec{r}) = \sum_k \frac{q_k^2 f(\vec{r} - \vec{r}_k)}{m_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_k)} \vec{E}_0(\vec{r}).$$
(4.87)

Wir nehmen nun an, alle Oszillatoren seien identisch, also $q_k = q$, $\gamma_k = \gamma$, $m_k = m$, $\omega_{0k} = \omega_0$ Wir führen die Dichte *n* der Oszillationen ein. Damit gilt

$$\vec{P}_{0} = \frac{q^{2}n}{m(\omega_{0}^{2} - \omega^{2} - i\omega\gamma)}\vec{E}_{0} \equiv \chi_{e}\vec{E}_{0} .$$
(4.88)

Also

$$\chi_e(\omega) = \frac{q^2 n}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} .$$
(4.89)

Im fall von Elektronen gilt q = -e, damit gilt für die dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega) = 1 + \frac{4\pi\eta e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}.$$
(4.90)

Bild der Dieelektrischen Funktion (Realteil und Imaginärteil)

Bei mehreren Arten von Oszillatoren mit Dichten n_j gilt einfach

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_{j} 4\pi \chi_e^{(j)}(\omega) = 1 + 4\pi e^2 \sum_{j} \frac{n_j}{m_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)}.$$
(4.91)

4.6.2 Kausalität

Wir betrachten jetzt $\epsilon(\omega)$ als Funktion einer komplexen Variable ω also in der komplexen Ebene von ω . Für Im $(\omega) > 0$ ist $\epsilon(\omega)$ analytisch. Das bedeutet, dass $\chi_e(\omega)$ (und auch $\epsilon(\omega)$) keine Pole in der oberen Halbebene hat. Diese Eigenschaft bedeutet Kausalität. Um dies zu verstehen betrachten wir die Fourier-Transform:

$$\chi_e(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \,\chi_e(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \,. \tag{4.92}$$

Für t < t' ist die Exponent $e^{-i\omega(t-t')}$ exponentiell klein für $\text{Im}(\omega) > 0$. Dann können wir das Integral in der oberen Halbebene abschließen. Dort gibt es keine Pole und damit $\chi_e(t-t') = 0$ für t < t'. Das ist die Kausalität. Denn gilt

$$P(t) = \int dt' \chi_e(t - t') \vec{E}(t') , \qquad (4.93)$$

16.01.15

verstehen wir, dass das E-Feld in der Vergangenheit kann nicht die Polarisation in der Zukunft erzeugen.

4.7 Elektromagnetische Wellen in Materie

Die Maxwell-Gleichungen in der Materie lauten

$$\nabla \vec{B} = 0$$
, $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (4.94)

$$\nabla \vec{D} = 4\pi\rho , \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$
(4.95)

Denn die homogenen Gleichungen haben sich nicht geändert, können wir wieder das Skalar- und das Vektor-Potential einführen durch

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
 , $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Wir betrachten ein homogenes, isotropes Medium mit $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$. Wir transformieren diese Gleichungen per Fourier-Transformation.

$$i\vec{k}\vec{D} = 4\pi\rho, \qquad i\vec{k}\times\vec{H} + \frac{i\omega}{c}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
(4.96)

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A}$$
(4.97)

Wir machen die Annahme, dass es keine Quellen gibt $(\rho, \vec{j} = 0)$. Der Zusammenhang zwischen den Feldern ist $\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega)\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ und $\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega)\vec{H}(\vec{k}, \omega)$. Aus den Gleichungen folgt nun.

$$\Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow i\epsilon\vec{k}\left(-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A}\right) = 0$$
(4.98)

$$\Rightarrow i\vec{k} \times \vec{H} + \frac{i\omega}{c}\vec{D} = 0 \Rightarrow i\mu^{-1}\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{A}) + \frac{i\omega\epsilon}{c}\left(-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A}\right) = 0$$
(4.99)

Wir wählen die Coloumb-Eichung ($\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$). Aus der ersten Gleichung dann folgt $\varphi = 0$. Die zweite Gleichung dann ergibt

$$i\mu^{-1}\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{A}) + \frac{i\omega\epsilon}{c} \left(\frac{i\omega}{c}\vec{A}\right) = 0$$
$$\left(\vec{k}^2 - \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)\vec{A} = 0.$$

Wir führen die Rückfouriertransformieren durch und erhalten eine modifizierte Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = 0.$$
(4.100)

Dies entspricht der Wellengleichung im Vakuum, jedoch mit der Geschwindigkeit $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Für die Lösung der Wellengleichung können wir eine ebene Welle ansetzen: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$. Es gilt

$$\omega^2 = c'^2 \vec{k}^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \vec{k}^2 = \frac{c^2}{n^2} \vec{k}^2, \qquad (4.101)$$

wobei n der komplexe Brechungsindex ist, $n(\omega) = n_r(\omega) + i\kappa(\omega)$. Die direkte Folge daraus ist

$$\vec{k}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}, \ \vec{k} = \vec{k}' + \mathrm{i}\vec{k}''.$$
 (4.102)

Im Allgemeinen zeigen \vec{k}' und \vec{k}'' nicht in die gleiche Richtung (Ebenen der konstanten Phase und konstanter Amplitude nicht parallel). Jetzt betrachten wir aber eine nicht allgemeine Situation $\vec{k}' \parallel \vec{k}''$. Dann gilt

$$\vec{k} = k\vec{e}_k, \ k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c'}.$$
(4.103)

Damit kommen wir über $\vec{A} \cdot \vec{k} = 0$ auf $\vec{A} \perp \vec{e}_k$. Es gibt also zwei Polarisationen, wie im Vakuum. Es gilt also

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \ \vec{A}_0 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$
(4.104)

mit $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_k$ und $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_k$. Darüber erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \vec{A}_0 \exp\left[i\left(\frac{n_r\omega}{c}\vec{e}_k\vec{r}-\omega t\right)\right] e^{-\frac{\kappa\omega}{c}\vec{e}_k\vec{r}} = \vec{A}_0 \cdot T.$$
(4.105)

Damit gilt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot T$$
 , $\vec{E}_0 = \frac{i\omega}{c} \vec{A}_0$ (4.106)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cdot T$$
 , $\vec{B}_0 = i\vec{k} \times \vec{A}_0 = n\vec{e}_k \times \vec{E}_0$ (4.107)

Wir betrachten nun die Eigenschaften

- Transversalität: $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$ wie im Vakuum
- zwei lineare Polarisationen, im allgemeinen elliptische Polarisation. Für lineare Polarisationen ist $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$, wie im Vakuum.
- Phasengeschwindigkeit $v_p = c/n_r$
- Wellenlänge $\lambda = (2\pi c)/(n_r \omega) = \lambda_0/n_r$
- Aplitudenverhältnis und Phasenverschiebung $n = |n|e^{i\delta}$ mit $\delta = \arctan(\kappa/n_r)$. Darüber ergibt sich $\vec{B}(\vec{r},t) = |n|\vec{e_k} \times \vec{E}(\vec{r},t-\delta/\omega)$
- $|n| = |\vec{B}(\vec{r}, t + \delta/\omega)| / |\vec{E}(\vec{r}, t)|$

Der Dämpfungsfaktor ist

$$e^{-\frac{\kappa\omega}{c}\vec{e}_k\vec{r}} = e^{-\vec{e}_k\vec{r}/d} , \qquad (4.108)$$

Wir nennen $d = c/(\omega \kappa)$ die Eindringtiefe (so tief kann die Welle in die Materie eindringen). Denn üblicherweise $\mu \approx 1$, können wir annähern

$$d^{-1} = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon \mu} \approx \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon} .$$
(4.109)



Abbildung 4.2: Brechung auf einer Grenzfläche zweier Medien.

4.8 Reflexion und Brechung

Wir betrachten eine Welle, die auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien einfällt. Diese wird nun teilweise reflektiert und teilweise gebrochen (siehe Abb. 4.2). Wir definieren α_e als den Winkel zwischen einfallender Welle und Flächennormale, α_r zwischen reflektierter Welle und Flächennormalen und α_g der Winkel zwischen gebrochener Welle und Flächennormale. Wir vernachlässigen nun den Imaginärteil des komplexen Brechungsindex. Das heisst, das untere Medium wird durch den Brechungsindex $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \in \mathbb{R}$ und das obere Medium durch den Brechungsindex $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \in \mathbb{R}$ charakterisiert. Es gilt

$$\vec{A}_{e}(\vec{r},t) = \vec{A}_{e0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}_{e}\vec{r} - \omega_{e}t)} \tag{4.110}$$

und damit analog dies für \vec{A}_r und \vec{A}_g . Die Winkelbeziehungen erhalten wir aus folgenden überlegungen bei den Randbedingungen. Bei z = 0 gilt:

• $\vec{E}_{\parallel}(z=-0) = \vec{E}_{\parallel}(z=+0)$

•
$$\vec{H}_{\parallel}(z=-0) = \vec{H}_{\parallel}(z=+0)$$

•
$$\epsilon_1 \vec{E}_\perp(z=-0) = \epsilon_2 \vec{E}_\perp(z=+0)$$

•
$$\mu_1 \vec{H}_\perp(z=-0) = \mu_2 \vec{H}_\perp(z=+0)$$

Es folgt

$$\vec{A}_e(z = -0, x, y, t) = \vec{A}_{e0} e^{i(k_{ex}x + k_{ey}y - \omega_e t)}, \ \vec{E}_e, \vec{H}_e(z = -0) \propto \vec{A}_e.$$
(4.111)

Dies gilt wiederum analog für r und g. Wir verstehen, dass die Randbedingungen nur dann erfühlt werden können, wenn die Exponenten $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ aller drei Wellen auf der Grenze (z = 0) gleich sind. Das bedeutet $\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$ und $k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} = k_x$ und $k_{ey} = k_{ry} = k_{gy} = k_y$. Die Vektoren \vec{k}_e , \vec{k}_r und \vec{k}_g liegen in einer Ebene, die durch \vec{k}_e und \vec{e}_z definiert wird. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $k_y = 0$ wird. Nun benutzen wir die allgemeine Formel: $k = n\omega/c$:

$$k_x = \begin{cases} k_{e,x} = k_e \sin \alpha_e = n_1(\omega/c) \sin \alpha_e \\ k_{r,x} = k_r \sin \alpha_r = n_1(\omega/c) \sin \alpha_r \\ k_{g,x} = k_g \sin \alpha_g = n_2(\omega/c) \sin \alpha_g \end{cases}$$
(4.112)

Daraus folgt



Abbildung 4.3: Schaubild zur ersten Polarisation (Das E-Feld zeigt in die Papierebene, da H-Feld in die Einfallsebene).

$$\alpha_r = \alpha_e \equiv \alpha_1 \quad \text{und} \quad n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2, \ \alpha_q \equiv \alpha_2$$

$$(4.113)$$

Dies nennt man Snellius-Gesetz. Für die z-Komponenten gilt

$$k_{e_z} = k_e \cos \alpha_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1$$

$$k_{r,z} = -k_r \cos \alpha_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1$$

$$k_{g,z} = k_g \cos \alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1}$$
(4.114)

Für $(n_1/n_2)\sin\alpha_1 > 1$ ist $k_{g,z}$ imaginär. Dies ist der Fall der Totalreflexion.

4.8.1 Intensitätsbeziehungen

Jetzt wollen wir die Intensitätsbeziehungen aufstellen. Wir benutzen die Beziehungen:

$$\vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{A} \|\vec{A}, \ \vec{B} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}, \ \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}, \ \vec{E} \perp \vec{B}$$
(4.115)

Es gibt zwei Polarisationen. Im ersten Fall gilt: $\vec{H} \parallel$ Einfallsebene und $\vec{E} \propto \vec{A} \perp$ Einfallsebene (siehe Abb. 4.3). Im zweiten Fall ist dies einfach umgekehrt. Der allgemeine Fall ist die Superposition beider Fälle, wir betrachten sie einzeln.

Polarisation 1

Wir wollen den ersten Fall explizit lösen. Wir schreiben alle Randbedingungunen auf. Es gilt

$$E_y(z = -0) = E_y(z = 0) \Rightarrow A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y}$$
(4.116)

und

$$\mu_1 H_z(z=-0) = \mu_2 H_z(z=0)$$
, $\mu H_z = ik_x A_y$, , $k_{ex} = k_{rx} = k_{gr}$. (4.117)

Damit folgt das Gleiche und wir erhalten keine neunen Informationen. Die Bedingung der Stetigkeit der Senkrechtskomponente des D-Feldes $\epsilon_1 \vec{E}_{\perp}(z=-0) = \epsilon_2 \vec{E}_{\perp}(z=+0)$ ist trivial erfüllt, da es keine Senkrechtskomponente in der Polarisation 1 gibt. Nun betrachten wir die letzte Randbedingung $\vec{H}_{\parallel}(z=-0) = \vec{H}_{\parallel}(z=+0)$. Denn es gilt $\mu H_x = -ik_z A_y$ erhalten wir

$$\mu_1^{-1} \left(k_{e,z} A_{e,y} + k_{r,z} A_{r,y} \right) = \mu_2^{-1} k_{g,z} A_{g,y}.$$
(4.118)

Wir benutzen zuerst die Beziehungen zwischen den Wellenvektoren (siehe 4.114). Damit folgt aus der Gleichung (4.118)

$$\frac{n_1}{\mu_1}\cos(\alpha_1)(A_{e,y} - A_{r,y}) = \frac{n_2}{\mu_2}\cos(\alpha_2)A_{g,y}.$$
(4.119)

Nun haben wir zwei Gleichungen (4.116 und 4.119) für zwei Unbekannte $A_{r,y}$ und $A_{g,y}.$ Die Lösung lautet

$$\frac{E_{g,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{g,y}}{A_{e,y}} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2}$$
(4.120)

und

$$\frac{E_{r,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{r,y}}{A_{e,y}} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2} \overset{Snellius,\mu\approx1}{\approx} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$
(4.121)

Üblicherweise vereinfachen sich diese beiden Gleichungen, da $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ ist. Wir wollen die Intensitäten berechnen. Wir betrachten den Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \vec{E} \times \vec{H}$. Denn $\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} = \mu^{-1} \vec{k} \times \vec{A}$, $\vec{E} = i(\omega/c)\vec{A}$, und $|\vec{k}| = n\omega/c$, erhalten wir $|\vec{S}| \propto (n/\mu)|E|^2 \approx n|E|^2$). Es ergibt sich der Reflexionskoeffizient von

$$R = \frac{|S_{r,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 |E_{r,y}|^2}{n_1 \cos \alpha_1 |E_{e,y}|^2} \stackrel{\mu=1}{=} \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} .$$
(4.122)

Beachten Sie, dass die z-Komponenten des Poynting-Vektors hier benutzt werden müssen. Für den Transmissionskoeffizient erhalten wir

$$T = \frac{|S_{g,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} \frac{|E_{g,y}|^2}{|E_{e,y}|^2} = \frac{4n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2} = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$
 (4.123)

Es gilt R + T = 1 (Energieerhaltung, die Absoption wurde vernachlässigt.)

Polarisation 2

Für die Polarisation 2 gilt hingegen

$$\frac{H_{r,y}}{H_{e,y}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \stackrel{\mu_t=1}{=} \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$$
(4.124)

und

$$\frac{H_{g,y}}{H_{e,y}} = \frac{2\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} \stackrel{\mu_t=1}{=} \frac{2n_2\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} = \frac{2\sin2\alpha_1}{\sin2\alpha_1 + \sin2\alpha_2}.$$
 (4.125)

Damit folgt für den Reflexionskoeffizient $(|\vec{S}| \propto (\mu/n)|H|^2 \approx (1/n)|H|^2)$

$$R = \frac{|S_{r,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{|H_{r,y}|^2}{|H_{e,y}|^2} = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$
(4.126)

Dieser unterscheidet sich stark von der Polarisation 1. Wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ so kommt es zu R = 0 und damit zu keiner Reflexion bei Polarisation 2. Es gilt

$$\cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 \text{ mit } \sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2 \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}.$$
(4.127)

Den Winkel α_1 nennt man dabei Brewsterwinkel.

Schaubild von R in Abhängigkeit zum Winkel für Polarisation 1 und 2 (n1<n2) (Brewsterwinkel!)



Abbildung 4.4: Brechung mit Absorption.

Schaubild von R in ... (n1>n2) (Brewsterwinkel totalreflexion)

Für $\alpha_1 = 0$ gilt $R_{\perp} = R_{\parallel} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$.

4.9 Brechung und Reflexion an der Grenze eines absorbierenden Mediums

23.01.2015 Wir nehmen an $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \in \mathbb{R}$ und $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = n_{2r} + i\kappa_2 \in \mathbb{C}$. Für den Wellenvektor gilt nun

$$\vec{k}^{\,2} = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \stackrel{\mu=1}{=} \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$
(4.128)

Wenn ϵ komplex ist, ist auch der Wellenvektor \vec{k} komplex $(\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'')$ und \vec{k}' und \vec{k}'' müssen nicht parallel sein. Im allgemeinen zeigen dabei die beiden Komponenten von \vec{k} in unterschiedliche Richtungen. Das gilt jetzt für \vec{k}_g , also $\vec{k}_g = \vec{k}_g' + i\vec{k}_g''$. Analog zu dem Fall ohne Absorption erhalten wir

$$k_{e,x} = k_{r,x} = k_{g,x} = k_x$$
, $k_{e,y} = k_{r,y} = k_g = 0$ (Einfallsebene!) (4.129)

Natürlich alle drei Frequenzen sind auch gleich. Daraus folgt, dass $k_{g,x}'' = 0$ (weil $k_{e,x}$ reell ist) und damit ist $\vec{k}_g'' \| \vec{e}_z$ (siehe Abb. 4.4). Über den Zusammenhang $\vec{k}^2 = n^2 (\omega/c)^2$ folgt nun

$$k_{x} = \begin{cases} k_{e,x} = k_{e} \sin \alpha_{e} = n_{1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha_{e} \\ k_{r,x} = k_{r} \sin \alpha_{r} = n_{1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha_{r} \\ k_{g,x} = n_{1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha_{1} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_{1} \equiv \alpha_{r} = \alpha_{e}$$
(4.130)

Für den komplexen Vektor \vec{k}_g gilt $\vec{k}_g^2=k_{g,x}^2+k_{g,z}^2=(\omega/c)\epsilon_2.$ Es gilt für die z-Komponente

$$k_{g,z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1} \in \mathbb{C}.$$
(4.131)

Die Eindringtiefe ist nun

$$d = \frac{1}{k_{g,z}''} \xrightarrow{\alpha_1 = 0} \frac{c}{\omega} \frac{1}{\operatorname{Im}\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\omega\kappa_2}.$$
(4.132)

Wir betrachten nun die Intensitätsbeziehungen. Für die Polarisation 1 gilt nun

$$R_{\perp} = \left| \frac{n_1 \cos \alpha_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}}{n_1 \cos \alpha_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}} \right|^2.$$
(4.133)

Für $\alpha_1=0$ vereinfacht sich R zu

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_{2r} - i\kappa_2}{n_1 + n_{2r} + i\kappa_2} \right|^2.$$
(4.134)

4.10 Elektromagnetische Wellen in Metallen

Wir betrachten nun Materialien mit frei beweglichen Elektronen. Die Leitfähigkeit sei $\sigma(\omega)$ und die Stromdichte damit $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$. Wir betrachten nun die nicht homogenen Maxwell-Gl.

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{D}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega)$$
(4.135)

$$i\vec{k}\vec{D}(\vec{k},\omega) = 4\pi\rho(\vec{k},\omega) \tag{4.136}$$

Mithilfe der Kontinuitätsgleichung $\vec{kj} = \omega \rho$ und der Beziehung $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ erhalten wir

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{\mathrm{i}\omega}{c} \left[\epsilon(\omega) - \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\sigma(\omega)\right] \vec{E}(\vec{k},\omega) = 0$$
(4.137)

$$\left[\epsilon(\omega) - \frac{4\pi}{i\omega}\sigma(\omega)\right]i\vec{k}\vec{E}(\vec{k},\omega) = 0$$
(4.138)

Wir definieren

$$\epsilon_{\Sigma}(\omega) = \epsilon(\omega) - \frac{4\pi}{i\omega}\sigma(\omega). \tag{4.139}$$

Wir betrachten nun $\epsilon_{\Sigma}(\omega)$ als dielektrische Funktion eines leitenden Mediums. Hier ϵ beschreibt die gebundenen Ladungen, wobei σ beschreibt die freien Ladungen. Wir bezeichnen nun ϵ_{Σ} als ϵ und das Alte ϵ als ϵ_{geb} . Wir verallgemeinern nun das Lorentz-Modell, sodass es auch für ein Metall gilt.

Drude-Modell Wir betrachten weitere Oszillatoren, die den freien Elektronen entsprechen. Daher ihre Frequenz $\omega_f = 0$, die Dämpfung sei $\gamma_f = 1/\tau$:

$$m\left(\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau}\dot{\vec{r}}\right) = q\vec{E}(t) \tag{4.140}$$

Daher gilt

$$\epsilon(\omega) = \underbrace{1 + \sum_{j} \frac{4\pi n_j e^2}{m_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)}}_{\epsilon_{\text{geb}}(\epsilon)} + \frac{4\pi n_f e^2}{m(-\omega^2 - i\omega/\tau)}.$$
(4.141)

Wir vergleichen, dies mit den Ergebnissen aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\rm geb}(\omega) - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega}.$$
(4.142)

Daraus folgt für $\sigma(\omega)$, aus der vorletzten Gleichung:

$$\sigma(\omega) = \frac{n_f e^2}{m} \frac{1}{1/\tau - i\omega}.$$
(4.143)

Dieser Zusammenhang nennt man Drude-Formel. Im Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega\tau\ll 1$ folgt bei Näherung

$$\sigma(\omega) \approx \frac{n_f e^2 \tau}{m} \equiv \sigma_D \tag{4.144}$$

und σ_D heisst die Drude-Leitfähigkeit. Damit gilt für beliebige Frequenzen

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_D}{1 - i\omega\tau}.\tag{4.145}$$

Für $\omega\tau\ll 1$ können wir

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\rm geb} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega} \stackrel{\omega\ll\sigma_D}{\approx} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}$$
(4.146)

annähern. Für gute Leiter gilt $\sigma_D \tau \gg 1$. Daher folgt aus $\omega \tau \ll 1$ die Relation $\omega \ll \sigma_D$. Wir betrachten als Beispiel Kupfer:

$$1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \,\mathrm{s}^{-1} \quad \sigma_D = 5.8 \,\cdot 10^{17} \,\mathrm{s}^{-1} \Rightarrow \sigma_D \tau = 1.6 \cdot 10^4 \gg 1. \tag{4.147}$$

Wir definieren

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi \sigma_D}{\tau}} \tag{4.148}$$

als Plasmafrequenz. Wir erhalten $\omega_p \tau = \sqrt{4\pi\sigma_D \tau}$. D.h., im guten Leiter gilt auch $\omega_p \tau \gg 1$. Bei niedrigen Frequenzen ist ϵ_{geb} eine reelle Konstante. Es folgt

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\rm geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} = \left(\epsilon_{\rm geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \tau^{-2}}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2 \tau^{-1}}{\omega(\omega^2 + \tau^{-2})}\right). \tag{4.149}$$

Es ergeben sich drei interessante Bereiche: $\omega \ll 1/\tau$, $1/\tau \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$ und $\omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$.

4.10.1 Skin-Effekt

Im Bereich der niedrigen Frequenzen $\omega \tau \ll 1$ findet der Skin-Effekt statt. Es folgt $\omega \ll \sigma_D$ und damit $\epsilon \approx -4\pi\sigma_D/(i\omega)$. Wir berechnen den Reflexionskoeffizient für Brechung an einer Metalloberfläche. Die Einfallswelle breitet in einem Dielektrikum ($\epsilon_1 \sim 1$) aus. Der Einfallswinkel sei $\alpha_1 = 0$. Wir benutzen die oben hergeleiteten Formeln

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 \approx \left| \frac{1 - \sqrt{\epsilon_2}}{1 + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 \,. \tag{4.150}$$

Es gilt für die dielektrische Funktion ϵ_2 im Metall

$$\sqrt{\epsilon_2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma_D}{\omega}} \quad , \quad |\sqrt{\epsilon_2}| \gg 1.$$
(4.151)

Daher erhalten wir volle Reflexion, $R\approx 1.$ (Metalle sind gute Spiegel.) Die Eindringtiefe erhalten wir dann über

$$d = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\mathrm{Im}\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}} .$$
(4.152)

Beispielsweise bei Kupfer $\omega = 2\pi \times 10^9 \,\text{Hz}$ folgt eine Eindringtiefe von $d = 2 \cdot 10^{-4} \,\text{cm}$. Für $\omega = 2\pi \times 50 \,\text{Hz}$ folgt eine Eindringtiefe von $d \approx 1 \,\text{cm}$. Daher fließt der 50 Hz-Strom in einer Schicht von ca. 1cm.
4.10.2 Plasma-Wellen

Transversale Wellen im Bereich $\omega \tau \gg 1$.

Wir betrachten nun den Fall $\omega\tau\gg$ 1. Hier eine gute Näherung für die dielektrische Funktion (siehe 4.149) lautet

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$
 (4.153)

Wir vernachlässigen hier den Imaginärteil von $\epsilon(\omega).$ Damit können wir den Brechungsindex betrachten

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \begin{cases} i\kappa = i\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - \epsilon_{geb}}, & \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_{geb}} \\ n_r = \sqrt{\epsilon_{geb} - \omega_p^2/\omega^2}, & \omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_{geb}} \end{cases}$$
(4.154)

Im ersten Fall, $\omega < \omega_p / \sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$, haben wir dann laut (4.150)

$$R \approx \left| \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right|^2 = \left| \frac{1 - i\kappa}{1 + i\kappa} \right|^2 = 1 .$$
(4.155)

Das heisst es ergibt sich volle Reflexivität. Das Metall ist ein guter Spiegel.

Im zweiten Fall, $\omega > \omega_p / \sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$ ist *n* reell. Das heisst das Metall ist in diesem Frequenzbereich (Ultravioletten) durchlässig. Die Dispersionsrelation in diesem Fall ergibt sich aus

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 = \frac{c^2}{\epsilon_{\rm geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} k^2 .$$
 (4.156)

Dann folgt

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 + c^2 k^2}{\epsilon_{\text{geb}}} . \tag{4.157}$$

Longitudinale Wellen: Plasma Wellen

Wir betrachten noch mal die nicht-homogenen Maxwell-Gleichungen (4.98):

$$\Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow i\epsilon \vec{k} \left(-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A} \right) = 0$$
(4.158)

$$\Rightarrow i\vec{k} \times \vec{H} + \frac{i\omega}{c}\vec{D} = 0 \Rightarrow i\mu^{-1}\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{A}) + \frac{i\omega\epsilon}{c}\left(-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A}\right) = 0$$
(4.159)

In der Coulomb-Eichung $\vec{k}\vec{A} = 0$ und mit $\epsilon(\omega) \neq 0$ es ergibt sich $\varphi = 0$ und wir erhalten die Wellengleichungen für die transversalen e.m. Wellen. Es gibt aber noch die Möglichkeit, dass $\epsilon(\omega) = 0$. Dann folgt $\vec{k} \times \vec{A} = 0$. Zusammen mit $\vec{k}\vec{A} = 0$ bedeutet das $\vec{A} = 0$. Andersrum muss jetzt das Skalarpotential φ nicht verschwinden. Also $\varphi \neq 0$. Das ergibt die Plasma-Wellen. In unserem Modell existieren die Plasma-Wellen nur für eine einzige Frequenz $\omega = \omega_p / \sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$. Damit ist \vec{k} beliebig. Also wir erhalten (ab jetzt $\epsilon_{\text{geb}} = 1$)

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_p t)} \tag{4.160}$$

Für das elektrische Feld folgt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_p t)} = -i\vec{k}\varphi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_p t)} .$$
(4.161)

Das ist eine Longitudinalwelle: $\vec{E}_0 \parallel \vec{k}$. Es gibt kein Magnetfeld. Die Ladungsdichte ergibt sich als

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi} \,\vec{\nabla}\vec{E} = \rho_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_p t)} = \frac{k^2 \varphi_0}{4\pi} \, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_p t)} \,. \tag{4.162}$$

28.01.15

Alternative Herleitung

Eine einfache Herleitung beginnt mit der klassischen Bewegungsgleichung eines Elektrons $m\ddot{\vec{r}} + \frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} = -e\vec{E}$. In Fourier-Darstellung ergibt sich $m(-\omega^2 - i\omega/\tau)\vec{r} = -e\vec{E}$. Im Fall $\omega\tau \gg 1$ vernachlässigen wir die Dämpfung und erhalten $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}$. Für die Stromdichte $\vec{j} = -en_f \vec{r} (n_f$ sei die Dichte der freien Elektronen) ergibt sich dann $m\dot{\vec{j}} = e^2n_f\vec{E}$. In Fourier-Darstellung: $-i\omega m\vec{j} = e^2n_f\vec{E}$. Dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung $i\vec{k}\cdot\vec{j} = i\omega\rho$ und das Gauß-Gesetz $i\vec{k}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$. Wir nehmen an, dass $\vec{k} \parallel \vec{E} \parallel \vec{j}$. Die drei Gleichung lassen sich gleichzeitig lösen nur für $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m}}$.

5 Spezielle Relativitätstheorie, kovariante Formulierung der ED

5.1 Einstein'sches Relativitätsprinzip

Die "gewöhnliche" Mechanik: Galilei-Invarianz. Gesetze der Newton-Mechanik gelten in gleicher Form in allen Inertialsystemen (IS'). Wir betrachten die zwei IS K und K'. Das IS K' bewegt sich mit Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum IS \vec{K} .

Bild zweier relativ zueinander Bewegender IS.

Die Newton'sche Mechanik ist Galilei invariant. Als Beispiel betrachten wir Teilchen i = 1, 2, ... bei einem zwei Körper-Potential $V(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|)$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = \sum_{i} \frac{m_i(\vec{r}_i)^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) .$$
(5.1)

Es ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)$$
(5.2)

Wir führen jetzt die Galileitransformation $(t' = t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t)$ durch und bekommen

$$m_{i}\ddot{\vec{r}_{i}}' = -\nabla_{i}'\sum_{j\neq i}V(|\vec{r}_{j}' - \vec{r}_{i}'|) .$$
(5.3)

Die Bewegungsgleichungen im IS K' haben dieselbe Form wie im K. D.h., das System ist Galilei-Invariant. Die Wechselwirkung durch $V(\{\vec{r}\})$ lässt auf augenblicklicher Ausbreitung der Wirkung schließen.

Bei Wellenphänomenen gibt es keine Galilei-Invarianz (Änderung der Form bei Transformation der Gleichung). Wir nehmen an es gebe eine Wellengleichung:

$$K: \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{r}, t) = 0$$
(5.4)

Nun führen wir eine Galileitransformation durch. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}\nabla', \nabla = \nabla'.$$
(5.5)

Daraus folgt

$$K': \left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\vec{v}\,\nabla'\frac{\partial}{\partial t'} + (\vec{v}\,\nabla')^2\right]\right) f'(\vec{r}\,',t') = 0$$
(5.6)

Andere Form, also keine Invarianz. Bei Schallwellen beispielsweise ist dies klar, sie breiten sich in einem Medium aus und besitzen daher ein ausgezeichnetes System (K) in dem das Medium ruht (daher sind rechtslaufende und linkslaufende Wellen von gleichem Geschwindigkeitsbetrag). Während im transformierten Bezugssystem dies nicht mehr gilt ($c'_L = c+v, c'_R = c-v$). Da die Maxwell-Gleichungen zu den elektromagnetischen Wellengleichungen führen, sind die Maxwell-Gleichungen nicht Galilei-Invariant. Vor Einstein (T<1905) gab es dafür verschiedene Erklärungsmöglichkeiten:

- 1. Maxwell-Gleichungen sind nicht korrekt. Die richtige Theorie des Elektromagnetismus ist Galilei-Invariant.
- 2. Galilei-Relativitätsprinzip ist nur auf die Mechanik anwendbar. Für den Elektromagnetismus gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem in dem sich die Lichttragende Substanz (Äther) in Ruhe befindet.
- 3. Es gibt ein neues, allgemeines Relativitätsprinzip, welches sowohl für die Mechanik, als auch für den Elektromagnetismus gilt. Daraus folgt, dass die Gesetze der Mechanik modifiziert werden müssen.

Die erste Möglichkeit wurde über Experimente "widerlegt" (Maxwellleichungen bestätigt). Die zweite Möglichkeit wurde von den meisten Physikern damals akzeptiert. Es wurde angenommen, es gäbe ein Äther in welchem sich die Elektromagnetischen Wellen verbreiten. Es wurden Bemühungen angestellt die Bewegung der Erde relativ zum "Äther" zu beobachten (Michelson,Morley (1887)). Es ergab sich dabei ein Null-Resultat. Geschwindigkeit des Lichts unabhänig von der Ausbreitungsrichtung. Damit musste die letzte Möglichkeit stimmen. Es folgt das Einsteinsche-Relativitätsprinzip (dritte Möglichkeit).

Postulate:

- 1. Die physikalischen Gesetze sind in allen IS identisch.
- 2. Lichtgeschwindigkeit ist gleich in allen IS und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

5.2 Lorentz-Transformation

Wir betrachten zwei Bezugssysteme, die sich mit einer relativen Geschwindigkeit \vec{v} zueinander bewegen.

Zwei Bezugssysteme bewegen sich relativ zueinander

Wir wollen nun die Koordinaten beider Systeme miteinander verbinden. Wir nehmen an, dass bei t = t' = 0 gilt $\vec{r} = \vec{0}$ und $\vec{r}' = \vec{0}$. Punkte im vierdimensionalen Raum nennt man *Ereignise*. Wir betrachten nun zwei Ereignisse:

- Ereignis 1: vom Punkt $\vec{r} = 0$ wird zum Zeitpunkt t = 0 ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit abgesendet
- Ereignis 2: das Signal gelangt zur Zeit t
 zum Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$

Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant und besitzt den Wert c. Daraus folgt für den Abstand

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. (5.7)$$

Im System K' gilt demnach

$$x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2} = c^2 t^{\prime 2}.$$
(5.8)

Im Allgemienen gilt für den Abstand zwischen zwei Ereignissen

$$s^{2} = c^{2}(t_{1} - t_{2})^{2} - (x_{1} - x_{2})^{2} - (y_{1} - y_{2})^{2} - (z_{1} - z_{2})^{2}.$$
(5.9)

Wenn in einem System $s^2 = 0$, dann muss dies auch in einem anderen System gelten: $s'^2 = 0$. Das Raum-Zeit-Kontinuum ist homogen und isotrop (da egal von wo aus betrachtet die Lichtgeschwindigkeit konstant ist). Der Zusammenhang zwischen beiden Koordinatensystemen ist linear: $s^2 = \lambda s'^2$. Für eine inverse Transformation soll auch gelten $s'^2 = \lambda s^2$, daher ist $\lambda = 1$ und $s^2 = s'^2$. Wir betrachten nun die folgende Situation: das IS K' bewegt sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bezüglich des IS K. Wir suchen nach einer lineare Transformation die die Koordinaten x und t betrifft:

$$x' = Ax + Bct$$
 $\Rightarrow s^2 = s'^2 \Rightarrow x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ (5.10)

$$y' = y \tag{5.11}$$
$$z' = z \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} z &= z \\ ct' &= Cx + Dct \end{aligned} \qquad ct &= \mathrm{i}\tau, \ ct' &= \mathrm{i}\tau' \end{aligned} \tag{5.12}$$

Es gilt also $x^2 + \tau^2 = x'^2 + \tau'^2$. Eine ge
eignete Transformation ist Rotation im zweidimensionalen euklidischen Raum

$$x' = \cos \alpha \, x + \sin \alpha \, \tau \tag{5.14}$$

$$\tau' = -\sin\alpha \, x + \cos\alpha \, \tau \tag{5.15}$$

Wir vergleichen mit

$$x' = Ax + iB\tau \tag{5.16}$$

$$\tau' = -iCx + D\tau \tag{5.17}$$

Das ergibt

$$A = D = \cos \alpha \tag{5.18}$$

$$B = C = -i\sin\alpha \tag{5.19}$$

Es muss gelten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Da
mit muss der Drehwinkel α imaginär sein, $\gamma = i\alpha \in R$. Das ergibt

$$A = D = \cos \alpha = \cosh \gamma \tag{5.20}$$

$$B = C = -i\sin\alpha = -\sinh\gamma \tag{5.21}$$

Damit folgt

$$x' = x \cosh \gamma - ct \sinh \gamma \tag{5.22}$$

$$ct' = -x\sinh\gamma + ct\cosh\gamma \tag{5.23}$$

Ursprung von K' bewegt sich in K mit der Geschwinigkeit v:

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = vt \Rightarrow x \cosh \gamma - ct \sinh \gamma = 0 \Rightarrow \tanh \gamma = v/c$$
(5.24)

Damit können wir nun $\cosh\gamma$ und $\sinh\gamma$ bestimmen:

$$\cosh \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
, $\sinh \gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (5.25)

Damit kommen wir auf die Endformel:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5.26}$$

Die Rücktransformationen sind dann

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (5.27)

Zeitdilatation Wir betrachten eine Uhr, die in K' ruht. Wir betrachten nun zwei Erreignise die im K' die folgenden Koordinaten haben $x'_1 = 0, t'_1$ und $x'_2 = 0, t'_2$. Dann gilt

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
(5.28)

Dies nennt man Zeitdilatation: $\Delta t > \Delta t'$. Die vergangene Zeit im ruhenden System ist größer. Eine bewegte Uhr geht langsamer.

Bild beider Systeme mit vergleichendnen Uhren.

Man kann den Uhrenvergleich durch eine dritte Uhr durchführen. Wir synchronisieren die beiden Uhren (bzw. alle Uhren in allen Systemen) im System K und lassen das System K' sich in Richtung von der dritten Uhr bewegen. Der Vorgang ist nicht symmetrisch. Es gibt demnach keinen Widerspruch. Wenn man nun erlaubt, dass das System K' eine endliche Beschleunigung erfahren kann kann man die Uhr auch wieder zur ersten Uhr bringen (was bei normalen Inertialsystemen nicht möglich ist).

Wir wollen den Begriff *Eigenzeit* definieren: Wir betrachten eine Uhr, die sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ (i.A. kein Inertialsystem) relativ zum IS K bewegt. Zu jedem Zeitpunkt gibt es ein Inertialsystem K' in dem sich die Uhr momentan in Ruhe befindet.

$$d\tau \equiv dt' = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
, $v = v(t) = |\vec{v}(t)|.$ (5.29)

Dabei ist τ die Eigenzeit. Es gilt

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}t \,\sqrt{1 - v^2/c^2} < t_2 - t_1.$$
(5.30)

Die Uhr wird, wenn sie eine geschlossene Bewegung ausführt geht im verlgiech zur ruhenden Uhr nach.

Bilder von Weltlinien.

Längenkontraktion: Wir betrachten einen Maßstab, der in K' ruht und in der Richtung der Bewegung (K' relativ zu K) ausgedehnt ist. Wir messen die Länge im K sodass $t_1 = t_2$. Dann erhalten wir

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 \quad \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
(5.31)

Die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung bleiben unverändert.

5.2.1 Raum- und zeitartige Abstände

Wir nehmen ein Ereignis zum Zeitpunkt t = 0 und $\vec{r} = 0$ und können nun alle anderen Ereignise klassifizieren.

x, t Diagramm... mit zwei Geraden, die durch das Schaubild gehen.

Man nennt

$$s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 > 0 \tag{5.32}$$

zeitartige Abstände. Es existiert ein System K' in dem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden. In diesem System wird $\vec{r}' = 0$ und $c^2 t'^2 = s^2$. Dieser Ereignisse kann manin absolute Zukunft und absolute Vergangenheit einteilen, wir wir immer sagen können, welches Ereignis früher/später war (in allen Systemen). Man nennt

$$s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 < 0 \tag{5.33}$$

raumartiger Abstand. Es existiert ein System K' an dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. Man nennt

$$s^2 = 0$$
 (5.34)

Lichtartiger Abstand. Beide Ereignisse sind mit Lichtausbreitung verbunden. Zwei Ereignisse können nur dann Kausal verbunden sein, wenn der Abstand ein zeitartiger Abstand ist.

5.2.2 Transformation der Geschwindigkeit

Wir nehmen an K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zu K. Sei \vec{u} die Geschwindigkeit eines Teilchens in K. Die entsprechende Geschwindigkeit des Teilchens in K' ist \vec{u}' . Wir betrachten eine infinitisimale Verschiebung des Teilchens

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + v/c^2dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
(5.35)

Es folgt

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + v/c^2\mathrm{d}x'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$
(5.36)

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{\mathrm{d}t'+v/c^2\mathrm{d}x'} = \frac{u'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}.$$
(5.37)

Die Transformation für u_z verläuft analog zu u_y . Im Grenzwert von kleinen Geschwindigkeiten folgt die "übliche" Addition der Geschwindigkeiten. Für den speziellen Fall $\vec{u}' \parallel$ x-Achse folgt

$$u'_x = u', u'_y = u'_z = 0 \Rightarrow u_x = u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$
 (5.38)

 $\text{Zudem folgt } |\vec{u}\,'| \leq c, |\vec{v}| \leq c \Rightarrow |\vec{u}| \leq c \text{ und } |\vec{u}\,'| = c, |\vec{v}| \text{ beliebig } \Rightarrow |\vec{u}| = c$

5.3 Viervektoren, Tensoren und Lorentz-Gruppe

Wir definieren

$$(x^{\mu}), \mu = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow (x^{\mu}) \equiv (ct, \vec{r}),$$
 (5.39)

dabei ist wichtig, dass das μ oben steht. Solche Vektoren, nennen wir kontravariante Vierervektoren, dabei sind

$$x^{0} = ct, x^{1} = x, x^{2} = y, x^{3} = z$$
(5.40)

die kontravarianten Komponenten des 4-Vektor. Nun definieren wir

$$(x_{\mu}): x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z.$$
(5.41)

Solche Vierervektoren nennen wir kovariante Vierervektoren. Es gilt nun

$$s^{2} = c^{2}t^{2} - \vec{r}^{2} = \sum_{\mu=0}^{3} x_{\mu}x^{\mu} \equiv x_{\mu}x^{\mu}.$$
 (5.42)

Ab jetzt nutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention (Summation über doppelt auftretende Indizes, einer kontravariant, der andere kovariant). Darüber ist nun

$$s^{2} = x_{\mu}x^{\mu} \quad \mathrm{d}s^{2} = \mathrm{d}x_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}.$$
 (5.43)

Nun machen wir eine weitere Definition

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 (5.44)

Dies nennt man den metrischen Tensor. Mithilfe von $g^{\mu\nu}$ kann man den Index "hoch ziehen":

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu} \tag{5.45}$$

Analog kann man den Index "nach unten ziehen"

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \tag{5.46}$$

Es gilt

$$s^{2} = x_{\mu}x^{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = g^{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}$$
(5.47)

und darüber

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu. \tag{5.48}$$

Dies nennt man Minkowski-Raum.

Lorentz-Gruppe Allgemein gilt für eine Gruppe $G, g \in G$

- Multiplikation/lineare Operation: $G \times G \rightarrow G : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$
- Assoziativität: $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3 \equiv g_1g_2g_3$
- Es gibt ein neutrales Element e: eg = ge = g
- Es gibt ein inverses Element: $g\mapsto g^{-1}, gg^{-1}=g^{-1}g=e$

Die Lotentz-Transformation für die kontravarianten Komponenten bezeichnen wir durch

$$x^{\prime\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \text{ und }. \tag{5.49}$$

 ${\rm Es \ gilt}$

$$s^2 \equiv x_\mu x^\mu = s'^2 = x'_\mu x'^\mu. \tag{5.50}$$

daraus folgt

$$g_{\mu\nu}x^{\prime\mu}x^{\prime\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}x^{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\ \beta}x^{\beta} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}.$$
(5.51)

Durch den Vergleich erhalten wir

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{5.52}$$

Damit ergibt sich (mit $(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}) \equiv \Lambda$ und $(g_{\alpha\beta}) \equiv g$)

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \tag{5.53}$$

Wir wollen nun zeigen, dass dies Gruppeneigenschaften besitzt:

- Λ_1, Λ_2 sind Lorentz transformationen, $\Lambda_1\Lambda_2$ ist eine L-Tra.
- $(\Lambda_1\Lambda_2)^T g \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T g \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g$

Man kann dies für alle Eigenschaften zeigen. Lorentz-Gruppe wird auch als O(3, 1) bezeichnet. Dies in Analogie zu, z.B., O(N)-Gruppe der linearen Transformationen, die die Länge eines beliebigen Vektors in einem N-dimensionalen euklidischen Raum erhalten lassen. In diesem Fall der metrischer Tensor ist eine Einheitsmatrix und $R \in O(N)$ ist äquivalent zu $R^T R = \mathbb{1}$. Das O steht dabei für orthogonal.

Die Lorentz-Gruppe ist 6-parametrisch (3 Rotationen, 3 Lorentz-Boosts). Für Rotationen gilt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.54)

für die Rotation um die z-Achse

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}$$
(5.55)

für eine Rotation um die y-Achse und

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}$$
(5.56)

für eine Rotation um die z-Achse. Für die Boosts schreiben wir

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma_x & -\sinh \gamma_x & 0 & 0\\ -\sinh \gamma_x & \cosh \gamma_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.57)

in x-Richtung,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma_y & 0 & -\sinh \gamma_y & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sinh \gamma_y & 0 & \cosh \gamma_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.58)

in y-Richtung und

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma_z & 0 & 0 & -\sinh \gamma_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma_z & 0 & 0 & \cosh \gamma_z \end{pmatrix}$$
(5.59)

in z-Richtung. Die 6 Parameter sind $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ und $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$. Die oben gegebenen Transformationen gehören der so genannten
 ëigentlichen L-Gruppe", denn die mit der Identität stetig zusammenhängen. Mann kann, z.B., den Limes
 $\gamma_z \to 0$ betrachten in dem $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \to \mathbb{1}$. Die Volle Lorentzgruppe besteht aus 4 Zusammenhängenden Komponenten

1. eigentliche L-Gruppe, beinhaltet 1.

1.2.2012

2. beinhaltet zeitliche Spiegelung:

$$\Lambda_Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.60)

3. beinhaltet räumliche Spiegelung:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.61)

4. beinhaltet räumliche und zeitliche Spiegelung:

$$\Lambda_{ZR} = \Lambda_Z \Lambda_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(5.62)

Für die Elementen der eigentlichen L-G gilt $\Lambda^T g \Lambda = g$, $\det(\Lambda) = 1$, $\Lambda^0_0 > 0$.

Tensordefinition Wir wollen die Objekte mit mehreren Idizes definieren. Tensor N-ter Stufe ist eine Größe mit mehreren Indizes.

$$T^{\alpha_1,\dots\alpha_N}$$
 kontravarianter Tensor, (5.63)

wenn T such bei Lorentz-Transformationen wie folgt transformiert

$$T^{\alpha_1,\dots,\alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \cdot \dots \Lambda^{\alpha_N}{}_{\beta_N} T^{\beta_1,\dots,\beta_N}.$$
(5.64)

Eine ähnliche definition finden wir auch für kovariante Komponenten von Tensoren

$$T_{\alpha_1,\alpha_2} = g_{\alpha_1,\beta_1} g_{\alpha_2,\beta_2} T^{\beta_1,\beta_2}.$$
 (5.65)

Man kann ko- und kontravariante Komponenten mischen

$$T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1,\beta_1} T^{\beta_1,\alpha_2}.$$
 (5.66)

Jetzt wollen wir herausfinden, was $g^{\mu}{}_{\nu}$ ist.

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu,\alpha}g_{\alpha,\nu} = \mathbb{1} = \delta^{\nu}_{\mu} = g_{\mu}{}^{\nu}.$$
(5.67)

Damit können wir auch die Lorentzmatricen transformieren

$$\Lambda_{\alpha}{}^{\beta} = g_{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}.$$
(5.68)

Die Matrix $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ ergibt die Lorentz-Tranformation für die kovarianten Komponenenten:

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu} \ . \tag{5.69}$$

Beachten Sie, dass $\Lambda_{\mu}^{\ \nu} \neq \Lambda_{\ \nu}^{\mu}$. Wir benennen $\Lambda_{\ \nu}^{\mu} \equiv \Lambda$, wobei $\Lambda_{\mu}^{\ \nu} \equiv \bar{\Lambda}$. Es gilt also

$$T'_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N} = \Lambda_{\alpha_1}^{\ \beta_1} \cdot \dots \cdot \Lambda_{\alpha_N}^{\ \beta_N} T_{\beta_1\dots\beta_N}.$$
(5.70)

Wir betrachten jetzt die Relation $\Lambda^T g \Lambda = g$:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{5.71}$$

Damit ergibt sich

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda_{\mu}{}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \ \Lambda^{T}\overline{\Lambda} = \mathbb{1}.$$
(5.72)

4-Gradient

Wir untersuchen nun den 4er-Gradient $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$. Ist das ein kontravariantes oder ein kovariantes Objekt. Um das entscheiden zu können wechseln wir die Variablen:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$
(5.73)

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \Rightarrow \partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} \partial_{\nu} \tag{5.74}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \Rightarrow \partial^{\prime \mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \partial^{\nu}.$$
(5.75)

Besonders wichtig ist die Darstellung des D'Alembert-Operator

$$-\Box \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial^\alpha.$$
(5.76)

Dies ist ein Lorentzskalar. Das bedeutet, dass die Wellengleichung Lorentz-Invaiant ist. Es gilt

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \tag{5.77}$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$
(5.78)

Vierergeschwindigkeit: Es gilt

$$x^{\mu}(t) = (ct, \vec{r}(t)), \ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$
 (5.79)

Damit definieren wir die 4-Geschwindigkeit als

$$u^{\nu} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \vec{v}).$$
(5.80)

Hier ist τ die Eigenzeit. Wir sehen, dass u^{μ} wie dx^{μ} ein 4er-Vektor ist mit $u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} u^{\nu}$

$$u^{\mu}u_{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}\tau^{2}} = \frac{\mathrm{d}s^{2}}{\mathrm{d}\tau^{2}} = c^{2}.$$
 (5.81)

Operationen mit Tensoren:

- Addition: $aS^{\alpha_1...\alpha_N} + bT^{\alpha_1...\alpha_N}$ ist ein Tensor der Stufe N
- Multiplikation: $S^{\alpha_1...\alpha_N}T^{\beta_1...\beta_N}$ ist ein Tensor der Stufe N+M
- Kontraktion: $g_{\alpha\beta}T^{\gamma_1...\alpha...\beta...\gamma_N}$ Tensor der Stufe N-2
- Tensorgleichungen: z.B. $S^{\alpha} = U^{\alpha\beta}T_{\beta}$

5.4 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

"Kovarianz" bedeutet hier "Forminvarianz". Nun wollen wir alle Größen der Maxwellgleichung, als 06.02.15 Lorentztensoren definieren um diese dann umzuschreiben:

Ladungs- und Stromdichte als Vierervektor: Wir betrachten die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{5.82}$$

Wir definieren zunächst nur

$$j^{\mu} \equiv (c\rho, \vec{j}). \tag{5.83}$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass dies ein Vierervektor ist. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0. \tag{5.84}$$

Dies ist ein Hinweis auf die 4-Vektor-Eigenschaft

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{v}\rho) = \rho(c, \vec{v}) = \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}u^{\nu}.$$
(5.85)

Nun betrachten wir die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V_0}.$$
(5.86)

Diese muss daher ein Lorentzskalar sein (dabei wurde die Invarianz der Ladung angenommen, Experimentel bestätigt).

4er-Potential: Wir definieren wieder zuerst im vorraus

$$A^{\mu} \equiv (\varphi, \vec{A}). \tag{5.87}$$

Wir wollen wieder zeigen, dass A^{μ} ein Vierervektor ist. Wir wollen Lorenz-Eichung annehmen

$$\nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_{\mu} A^{\mu} = 0.$$
(5.88)

Nun wollen wir die Maxwellgleichungen umschreiben.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -4\pi\rho \tag{5.89}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
(5.90)

Daraus folgt

$$-\partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c}j^{\mu} \tag{5.91}$$

bzw.

$$\Box A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \tag{5.92}$$

Dies sind die Maxwellgleichungen kovarianter Form.

5.5 El/mag. Feldtensor, Maxwell-Gl für E- und B-Feld in kov. Form

Es gilt

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
 (5.93)

und darüber den antisymmetrischen Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}. \tag{5.94}$$

Für ihn gilt

$$F^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$
(5.95)

und

$$F_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$
(5.96)

und

$$F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}.$$
 (5.97)

Nun gilt

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} = \frac{4\pi}{c}j^{\nu} \to \partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = \frac{4\pi}{c}j^{\nu}.$$
(5.98)

Daraus folgt

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^{\nu}.$$
(5.99)

Dies sind de inhomogenen Maxwellgleichungen für \vec{E} und \vec{B} in kovarianter Form.

- $\nu = 0 \Rightarrow \nabla \vec{E} = 4\pi \rho$
- $\nu = 1, 2, 3 \Rightarrow \nabla \times \vec{B} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Die homogenen Gleichungen folgen automatisch aus $F^{\nu\mu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$. Somit folgt der duale Feldstärketensor (Pseudotensor), der völlig antisymmetrisch ist:

$$\tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$
(5.100)

Wir wollen uns das an einem Beispiel näher klar machen:

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} \left(\epsilon^{0123} F_{23} + \epsilon^{0132} F_{32} \right) = F_{23}, \tag{5.101}$$

für $\tilde{F}^{\mu\nu}$ folgt

$$\tilde{F}^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}.$$
(5.102)

Wegen

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(\partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}\right) = 0$$
(5.103)

folgt

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.104}$$

Dies entspricht für $\nu=0$

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{5.105}$$

und für $\nu=1,2,3$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$
(5.106)

Es gilt

$$\partial^{\mu}F^{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}F^{\beta\mu} + \partial^{\beta}F^{\alpha\mu} = 0.$$
(5.107)

Falls es magnetische Monopole gäbe müsste

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^{\nu}_{\rm mag} \tag{5.108}$$

gelten.

5.6 Lorentz-Transformationen der elektromagnetischen Felder

Wir betrachten einen bewegung in x-Richtung:

$$F^{\prime\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}.$$
(5.109)

 mit

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma & 0 & 0\\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(5.110)

und

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (5.111)

Beispielsweise würde jetzt gelten

$$E_{2}' = F'^{20} = \Lambda^{2}{}_{\alpha}\Lambda^{0}{}_{\beta}F^{\alpha\beta} = \Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{0}{}_{\beta}F^{2\beta} = \Lambda^{0}{}_{\beta}F^{2\beta} = \Lambda^{0}{}_{0}F^{20} + \Lambda^{0}{}_{1}F^{21} = \cosh\gamma E_{2} - \sinh\gamma B_{3}.$$
(5.112)

Die ähnliche Analyse zeigt, dass die parallelen zur \vec{v} Komponenten bleiben dabei erhalten: $\vec{E'_1} = \vec{E_1}$ und $B'_1 = B_1$ bzw. $\vec{E_{\parallel}}' = \vec{E_{\parallel}}, \vec{B_{\parallel}}' = \vec{B_{\parallel}}$. Für die transversalen Komponenten erhalten wir

$$E_2' = \cosh \gamma E_2 - \sinh \gamma B_3 \tag{5.113}$$

$$E'_{3} = \cosh \gamma E_{3} + \sinh \gamma B_{2}$$

$$E'_{3} = \cosh \gamma B_{2} + \sinh \gamma E_{2}$$

$$(5.114)$$

$$E'_{3} = \cosh \gamma B_{2} + \sinh \gamma E_{2}$$

$$(5.115)$$

$$B'_{2} = \cosh \gamma B_{2} + \sinh \gamma E_{3}$$

$$B'_{2} = \cosh \gamma B_{2} + \sinh \gamma E_{3}$$

$$(5.115)$$

$$(5.116)$$

$$B'_3 = \cosh \gamma B_3 - \sinh \gamma E_2. \tag{5.116}$$

Wir können dies in der Vektor-Form ausdrücken

$$\vec{E}_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}}{c} \right) \quad , \quad \vec{B}_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}}{c} \right). \tag{5.117}$$

Dabei gilt $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}.$

5.7 Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir nehmen an im System K bewegt sich eine Ladung mit der Geschwindigkeit \vec{v} parallel zur x-Achse. Im System K' ruht diese Ladung ($\vec{E}' = q\vec{r}'/r'^3$, $\vec{B}' = 0$). Die Lorentz-Transformation lautet

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5.118}$$

Es gilt für die parallelen Komponente des E-Feldes

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q(x-vt)}{r'^3\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ mit } r'^3 = \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}.$$
 (5.119)

für die beiden anderen Komponenten gilt

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qy'}{r'^3\sqrt{\cdots}} \quad , \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qz'}{r'^3\sqrt{\cdots}}.$$
 (5.120)

Damit gilt insgesamt

$$\vec{E} = \frac{q}{r'^3 \sqrt{\dots}} (x - vt, y, z).$$
(5.121)

Für das B-Feld gilt nun mit $B_x = B'_x = 0$ (die Formeln (5.117) müssen wir mit $\vec{v} \to -\vec{v}$ verwenden):

$$B_{y} = -\frac{v}{c} E'_{z} = -\frac{qvz'}{cr'^{3}\sqrt{\dots}} , \quad B_{z} = \frac{v}{c} E'_{y} = \frac{qvy'}{cr'^{3}\sqrt{\dots}}$$
(5.122)

und damit insgesamt

$$\vec{B} = \frac{qv}{cr'^3\sqrt{\dots}}(0, -z, y).$$
(5.123)

Für $v \ll c$ folgt

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}'_{nr}}{r'^3_{nr}} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \vec{r}'_{nr} = (x - vt, y, z)$$
(5.124)

und

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}'_{nr}}{r_{nr}^{\prime 3}} + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{c^3}\right).$$
(5.125)

Es gilt also $|\vec{B}|/|\vec{E}| \propto v/c.$

5.8 Beschleunigte Ladungen, Liénard-Wichert-Potential, Strahlung

Wir werden die Rechnung hier nicht durchführen. Sie ist nachzulesen im Kapitel 23 vom Fließbach II.

5.9 Dopplereffekt

5.9.1 Nichtrelativistischer Fall (Schallwellen)

Wir betrachten zuerst den nichtrelativistischen Fall (beispielsweise Schall). In diesem Fall gibt es ein ausgezeichnetes Bezugsystem in dem die Substanz ruht. In diesem System gilt

$$\delta \rho = \delta \rho_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \ \varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} \tag{5.126}$$

mit $\omega = c|k|$. Hier ist c die Schallgeschwindigkeit.

1. Fall: Der Sender ist in Ruhe im System K (wo auch die Substanz ruht) und der Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in K und ruht entsprechend im K'. Im K gilt $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ mit $\omega = c|\vec{k}|$. Darüber hinaus

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$
 (5.127)

Es gilt

$$\varphi = \omega t - \vec{k}(\vec{r}' + \vec{v}t) = \omega' t - \vec{k}\vec{r}'$$
(5.128)

 mit

$$\omega' = \omega - \vec{k}\vec{v} = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\cos\Theta\right).$$
(5.129)

Hier ist Θ der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{v} .

2. Fall: der Beobachter ruht im K' (wo auch die Substanz ruht) und der Sender bewegt sich mit Geschwindigkeit \vec{v} in K' und ruht entsprechend im K. Jetzt gilt im K' (wo die Substanz ruht) $\varphi = \omega' t - \vec{k}\vec{r}'$ mit $\omega' = c|\vec{k}|$. Darüber hinaus $\vec{r} = \vec{r}' - \vec{v}t$. Damit gilt

$$\omega = \omega' - \vec{k}\vec{v} = \omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\Theta\right).$$
(5.130)

und

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}\cos\Theta}.\tag{5.131}$$

In beiden Fällen ist ω die eigene Frequenz des Senders.

5.9.2 Relativistischer Fall, E.M. Wellen

Nun führen wir die Betrachtung für die El/mag-Welle durch (Licht). In diesem Fall gibt es kein ausgezeichnetes System, denn es gibt keine Substanz. In jedem System gilt

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\varphi}, \varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = k_{\mu}x^{\mu}, k^{\mu} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$$
(5.132)

Die Phase ist ein Lorentz-Skalar. Damit ist k_{μ} ein 4-Vektor. Eine Argumentation warum dies gilt ist, dass bei der Fouriertransformtaion $k_{\mu} \Leftrightarrow -i\partial_{\mu}$. Es gilt

$$k^{\mu}k_{\mu} = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0.$$
 (5.133)

Es gebe eine relative Geschwindigkeit \vec{v} des Senders relativ zum Beobachter. K sei das Ruhesystem des Senders und K' das Ruhesystem des Beobachters. Wir erwarten, dass $\omega = c |\vec{k}|$ die Frequenz der Quelle ist und $\omega' = c |\vec{k}'|$ die Frequenz, die der Beobachter misst ist. Nun transformieren wir die Größen wie 4-Vektoren mithilfe der Lorentz-Transformation:

$$k_x = \frac{k'_x - \frac{v\omega'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad \omega = \frac{\omega' - vk'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5.134}$$

Für die restlichen gilt: $k_y = k'_y, k_z = k'_z$ und

$$vk'_x = vk'\cos\Theta = \frac{v\omega'}{c}\cos\Theta.$$
(5.135)

Es gilt damit für die Frequenz

$$\omega = \frac{\omega'(1 - \frac{v}{c}\cos\Theta)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
(5.136)

Dies kann nach ω' umgestellt werden:

$$\omega' = \frac{\omega\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\Theta\right)}.$$
(5.137)

Dies ist der Dopplereffekt für elektromagnetische Wellen.