Übungen zur Theoretischen Physik Fa   WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Besprechung 21.11.2017

---

1. Anwendung des Funktionaldeterminantenkalküls von Übungsblatt 1: (30 Punkte)

(a) Maxwell-Beziehungen.

Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1}$$

und dass daraus folgt dass $\partial(T,S)/\partial(p,V) = 1$ (Definition siehe Blatt 1).

(b) Zusammenhang zwischen Wärmekapazitäten.

Leiten Sie, entsprechend einem Beweis aus der Vorlesung, folgende Gleichung her

$$c_p - c_V = -T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} \tag{2}$$

(c) Gas in einem Behälter.

In einem Behälter mit einer durchlässigen Trennwand a, wird der Druck auf beiden Seiten der Trennwand durch entsprechende Bewegung von Kolben konstant gehalten. Den Druck auf der linken Seite bezeichnen wir mit p_1, den auf der rechten Seite mit p_2, wobei $p_2 < p_1$. Gas aus der linken Seite geht stetig in die rechte Seite über. Dabei verändern sich der Druck p_1 und der Druck p_2 nicht. Wir nehmen an, dass das Gas von jeglichem äußeren Medium thermisch isoliert ist.

(i) Zeigen Sie, dass sich die Enthalpie H im Verlauf dieses Prozesses nicht ändert.

(ii) Nehmen Sie an $p_2 - p_1 = \delta p \ll p_1, p_2$. Bestimmen Sie den entsprechenden Temperaturunterschied δT zwischen den zwei Teilen des Behälters.

Hinweis: Sie sollten einen Ausdruck für $(\partial T/\partial p)_H$ in Abhängigkeit von c_p und thermodynamischer Variablen mit Hilfe einer Zustandsgleichung $V = V(T,p)$ erhalten, ohne die Zustandsgleichung des idealen Gases zu verwenden.

(iii) Zeigen Sie, dass in diesem Prozess die Änderung der Entropie positiv ist. Diskutieren Sie dieses Ergebnis.

2. Erzeugende Funktionen und Zentraler Grenzwertsatz: (25 Punkte)

Eine Zufallsvariable X sei gegeben durch ein Menge möglicher Werte $\{x\}$, die sie annehmen kann und durch eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$.

Der Mittelwert ist definiert als $\langle X \rangle = \int dx P(x) x$, und die Varianz über $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$.

Die charakteristische Funktion $\phi_X(k)$ ist gegeben durch die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\phi_X(k) = \int dx P(x) e^{ikx}. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt, also

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dk^n} \phi_X(k)|_{k=0}. \tag{4}$$

(b) Die Kumulanten C_n einer Zufallsvariablen X sind über die charakteristische Funktion $\phi_X(k)$ folgendermaßen definiert

$$\phi_X(k) := \exp\left(\sum_n C_n(X) \frac{(ik)^n}{n!} \right). \tag{5}$$

Verwenden Sie diese Definition für die Kumualanten und zeigen Sie, dass C_1 dem Mittelwert, und die zweite Kumulante C_2 der Varianz σ^2 entspricht.

(c) Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit charakteristischen Funktionen $\phi_{X_1}(k)$ und $\phi_{X_2}(k)$. Was ist die charakteristische Funktion der Summe $X_1 + X_2$?

(d) Nehmen wir nun unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i = 1, \ldots N$ mit identischen Verteilungsfunktionen $P(X)$ mit Mittelwert $\langle X \rangle$ und Varianz σ^2 an. Wir definieren eine Zufallsvariable $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i / N$. Überprüfen Sie, dass für große N die Verteilungsfunktion von S_N eine Gaussverteilung mit Mittelwert $\langle X \rangle$ und Varianz σ^2/N wird.

Hinweis: Es ist nützlich die statistische Unabhängigkeit der X_i zu verwenden und die charakteristische Funktion $\Phi_{S_N}(k)$ zu berechnen. Zeigen Sie dann, dass die Kumulanten von S_N folgende Gleichung erfüllen

$$C_m(S_N) = N^{1-m} C_m(X). \tag{6}$$

3. Gaußverteilung für mehrere Variablen: (25 Punkte)

Die Gaußverteilung $\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1, \ldots \xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} \xi_i A_{ij} \xi_j\right) \tag{7}$$

Da ρ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss diese normiert sein, d.h.

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_M \, \rho(\xi_1, \ldots, \xi_M) = 1.$$

Die Matrix A muss symmetrisch und positiv definit sein. Es ist hilfreich, die Inverse der Matrix A_{ij} einzuführen: $G_{ij} = [A^{-1}]_{ij}$. Aus $A_{ij} = A_{ji}$ folgt dann auch $G_{ij} = G_{ji}$.

Berechnen Sie die folgenden Größen:

(a) den Mittelwert

$$\langle \xi_i \rangle = \int d\xi_1 \ldots d\xi_M \xi_i \rho(\xi_1, \ldots, \xi_M),$$

(b) die Standardabweichung

$$\langle \xi_i^2 \rangle - \langle \xi_i \rangle^2,$$

(c)

$$\left\langle \exp\left(i\beta \sum_{k=1}^{M} \xi_k\right)\right\rangle,$$

Hinweis: Führen Sie dann eine quadratische Ergänzung durch (β sei eine reelle Konstante);

(d) den Korrelator

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle.$$

Betrachten wir nun eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0, \tau]$. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ durch

$$\rho(\{\xi(t)\}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \, \xi(t) g^{-1}(t-t') \xi(t')\right). \tag{8}$$

gegeben ist.

(e) Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt. Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (7).

(f) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\left\langle \exp\left(i \int_0^\tau dt\, \xi(t) \right) \right\rangle, \tag{9}$$

indem Sie die diskretisierte Version benutzen und danach das Ergebnis wieder durch kontinuierliche Integrale ausdrücken.

(g) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t - t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung?

4. Stationäre Lösung der Liouville-Gleichung: (20 Punkte)

Betrachten Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, wobei $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ ein Vektor im Phasenraum ist. Zeigen Sie nun mit Hilfe der klassischen Liouville-Gleichung, dass eine Gibbs-Verteilung ρ, die nur über die Energie von $\boldsymbol{x}$ abhängt, stationär ist,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big(H(\boldsymbol{x})\Big) = 0.$$