Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman **Blatt 3**

PD Dr. B. Narozhny **Besprechung 05.12.2017**

---

1. Nichtwechselwirkende Spins: (50 Punkte)

Betrachten Sie ein System von $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Spins $S = 1/2$, das sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ befindet. Solches System kann man mithilfe den folgenden Hamiltonoperator beschreiben

$$\widehat{H} = -\mu \sum_a \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a \cdot \boldsymbol{H}.$$

(a) Bestimmen Sie die erlaubten Werte für die Gesamtenergie E.

(b) Finden Sie die Zahl $\Gamma(E)$ der Zustände, die die gegebene Energie E haben.

(c) Finden Sie die Entropie des Systems als eine Funktion der Energie. Für die gegebene Energie, führen Sie die gesamte Magnetisierung $\boldsymbol{M} = \sum_a \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a$ des Systems ein und finden Sie die Entropie als eine Funktion von $\boldsymbol{M}$.

(d) Finden Sie die Temperatur des system sowohl als eine Funktion der Energie, $T(E)$, als auch als eine Funktion der Magnetisierung, $T(M)$.

(e) Finden Sie die freie Energie des systems, $F(T, H) = E - TS$. Benutzen Sie das Ergebnis um die spezifische Wärmekapazität $C_H(T)$ zu bestimmen.

2. Dichtematrix für den Spin-1/2: (20 Punkte)

Für einen Spin-1/2 kann man die Dichtematrix durch den Polarisationsvector $\boldsymbol{P}$ ausdrücken:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\boldsymbol{P}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass wenn $|\boldsymbol{P}| = 1$, dann ist der Spin in einem reinen Zustand, der mit der folgenden Wellenfunktion dargestellt werden kann:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix}.$$

Die zwei Winkel legen die Richtung von $\boldsymbol{P}$ fest:

$$\boldsymbol{P} = |\boldsymbol{P}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

(b) Betrachten Sie jetzt ein System, das aus zwei Spin-1/2-Teilchen besteht. Berechnen Sie nun für alle vier Quantenzustände des Gesamtsystems $|S, S^z\rangle$, wobei $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$, die reduzierte Dichtematrix des Teilchens 1:

$$\hat{\rho}_1 = \mathrm{Tr}_2 \hat{\rho} = \sum_{s_2^z} \langle s_2^z | \hat{\rho} | s_2^z \rangle,$$

wobei $\hat{\rho}$ die Dichtematrix des Gesamtsystems ist. In welchen der vier Zustände des Gesamtsystems befindet sich das Teilchen 1 in einem reinen Zustand?
Hinweis: Die Dichtematrix des Gesamtsystems ist durch

$$\hat{\rho} = |S, S^z\rangle\langle S, S^z|$$

gegeben.

(c) Berechnen Sie für alle vier Zustände die von-Neumann-Entropie des Teilchens 1

$$S[\hat{\rho}_1] = -k_B \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_1 \ln \hat{\rho}_1].$$

3. Maxwell-Verteilung: (30 Punkte)

In der Vorlesung wurde der folgende Ausdruck für die mikrokanonische Verteilungsfunktion postuliert:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Sigma(E)dE}, & E < H(x) < E + dE; \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei x ein Punkt im Phasenraum ist. Im Limes $dE \to 0$ kann man $\rho(x)$ durch eine Delta-Funktion ausdrücken

$$\rho(x) \Rightarrow C_0 \delta(H(x) - E), \quad [C_0 = 1/\Sigma(E)].$$

Die Wahrscheinlichkeit dw, das System im Phasenvolumenelement dx zu finden, lautet dann

$$dw = \rho(x) dx.$$

Betrachten Sie das ideale Gas mit N Teilchen, Gesamtenergie E und Volumen V. Drücken Sie die Gesamtenergie $H[\{p_n\}, \{x_n\}]$ des Gases durch die Koordinaten und die Impulse der Teilchen aus. Die Wahrscheinlichkeit dw lautet nun

$$dw = C_0 \delta(H[\{p_n\}, \{x_n\}] - E) \prod_{n=1}^{N} d^3p_n d^3x_n \ .$$

Bestimmen Sie die 1-Teilchen-Verteilungsfunktion

$$\rho_1(x_1, p_1) \equiv \int \prod_{n=2}^{N} d^3p_n d^3x_n \, \rho(x)$$

und dadurch die 1-Teilchen-Impulsverteilung $f(p_1) = \int d^3x_1 \, \rho_1(x_1, p_1)$. Drücken Sie das Ergebnis durch die Energie pro Teilchen $\bar{\epsilon} = E/N$ aus. Vereinfachen Sie das Ergebnis im Limes $N \gg 1$. Die Normierungskonstante ist in dieser Übung nicht wichtig.

Hinweis: Für $N \gg 1$ gilt $\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N \approx e^{-x}$. Die Maxwell-Verteilung ergibt sich aus der für das ideale Gas gültige Relation $\bar{\epsilon} = 3k_\mathrm{B}T/2$.