Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 4
Besprechung 07.11.2017

---

1. Nichtwechselwirkende Spins: (25 Punkte)

Betrachten Sie ein System von $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Spins $S = 1/2$, das sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ befindet. Solches System kann man mithilfe den folgenden Hamiltonoperator beschreiben

$$\widehat{H} = -\mu \sum_a \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a \cdot \boldsymbol{H}.$$

Hier soll das kanonische Ensemble untersucht werden.

(a) Wodurch werden die Mikrozustände festgelegt?

(b) Finden Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T,H)$ und die freie Energie $F(T,H)$.

(c) Bestimmen Sie die thermodynamischen Größen, d.h. die Entropie, die Magnetisierung und die Wärmekapazitäten

$$c_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H, \qquad c_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M.$$

(d) Finden Sie die Näherungsausdrücke für M für kleine ($\mu H \ll k_B T$) und große ($\mu H \gg k_B T$) Magnetfelder. Berechnen Sie die Nullfeld-Suszibilität

$$\chi(T) = \lim_{H\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T.$$

2. Heisenberg–Modell für 2 Gitterplätze: (25 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton–Operator des Heisenberg–Modells für 2 Spins-1 $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$:

$$\widehat{\mathcal{H}} = -J\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 - \mu \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2), \qquad J > 0,$$

(a) Zunächst sei das äußere Magnetfeld $H = 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K und daraus die spezifische Wärme C_V als Funktion der Temperatur T.

(b) Nun sei $H \neq 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K, die freie Energie F und daraus die Magnetisierung M. Berechnen Sie dann die Suszeptibilität $\chi(T) = \frac{\partial M}{\partial H}\big|_{H=0}$ bei $H = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\chi(T)$ als Funktion der Temperatur.

3. Masselose relativistische Teilchen: (25 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas aus N ununterscheidbaren masselosen relativistischen Teilchen, deren Energie durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\boldsymbol{p}_i|$$

gegeben ist. Das Gas befinde sich in einem zweidimensionalen Volumen V.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die freie Energie F.

(b) Bestimmen Sie die Entropie S und den Druck P aus der freien Energie.

(c) Leiten Sie die Zustandsgleichung her.

4. Ideales Gas: (25 Punkte)

Wiederholen Sie die Aufgabe 3 für ein Gas aus N nichtwechselwirkenden Teilchen, die die folgende Dispersionsrelation haben

$$\epsilon_i = a p_i^4, \qquad p_i = |\boldsymbol{p}_i|.$$

Das Gas befinde sich in einem dreidimensionalen Volumen V.

Hinweis

Das folgenden Integral kann nützlich sein

$$\int_0^\infty dp p^2 e^{-bp^4} = \frac{1}{4}\Gamma(3/4),$$

wobei $\Gamma(z)$ ist die Eulersche Gammafunktion.