Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman **Blatt 6**

PD Dr. B. Narozhny **Besprechung 30.01.2018**

---

1. Landau-Niveaus: (30 Punkte)

Magnetfelder koppeln sowohl an den Spin von Teilchen als auch an die Bahnbewegung geladener Teilchen. In dieser Aufgabe geht es um den Einfluss eines homogenen Magnetfelds auf die Bewegung von Elektronen (Masse m, Ladung e), die Kopplung an den Spin wird vernachlässigt.

Üblicherweise beschreibt man das äußere elektromagnetische Feld mit Hilfe des Vektorpotentials $\boldsymbol{A}$ und des skalaren Potentials φ.

Der Hamilton-Operator für ein Teilchen ohne Spin im Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ hat die Gestalt

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2.$$

Wir wählen die Richtung des Magnetfeldes als z-Achse, d.h. $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$. Dann wählen wir das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ in der Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ als $\boldsymbol{A} = (-Hy, 0, 0)$.

(a) Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung.

(b) Verwenden Sie den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion des Elektrons

$$\psi = \chi(y) \exp[i(p_x x + p_z z)].$$

Leiten Sie eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ her.

(c) Nutzen Sie die Analogie mit dem harmonischen Oszillator und zeigen Sie, dass die Eigenenergien durch

$$E = \omega_z \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}$$

gegeben sind. Die Energieniveaus E_n werden als Landau-Niveaus bezeichnet. Was ist ω_z? Welche Werte kann n annehmen?

(d) Das System sei auf ein Volumen $V = L_x L_y L_z$ beschränkt. Warum sind die Landau-Niveaus entartet? Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad

$$g(H) = \frac{|e| L_x L_y H}{2\pi}$$

ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Bewegung in der x-y-Ebene aussieht. Der Bewegungsmittelpunkt sollte innerhalb der Fläche $L_x L_y$ liegen. Nehmen Sie an, dass L_x und L_y sehr viel größer sind als die typische Längenskala der Elektronenbewegung.

2. Landau-Diamagnetismus in 2D: hohe Temperaturen: (30 Punkte)

Betrachten Sie ein System N freier Elektronen im Magnetfeld. Das System sei auf eine zwei-dimensionalen Oberfläche (mit $S = L_x L_y$) beschränkt (**Bitte, keine 3D Rechnungen einreichen!**). Das Magnetfeld ist in Richtung der z-Achse gerichtet.

Bei sehr hohen Temperaturen können die Elektronen durch die klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik beschrieben werden. In diesem Fall faktorisiert die kanonische Zustandssumme in die Einteilchenzustandssummen, $Z = Z_1^N/N!$.

(a) Finden Sie die Einteilchenzustandssumme Z_1 in Bezug auf den Bohrschen Magneton $\mu_B = |e|/(2m)$ und die thermische Wellenlänge λ_T.

(b) Bestimmen Sie die Magnetisierung

$$M_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{V,T}.$$

3. Magnetismus des zwei-dimensionalen Fermigases: (40 Punkte)

Betrachten Sie weiterhin das zwei-dimensionale System freier Elektronen im Magnetfeld aus Aufgabe 2, berücksichtigen Sie aber zusätzlich die Spinenartung (**Bitte, keine 3D Rechnungen einreichen!**). Bei Temperaturen von der Größenordnung der Fermienergie E_F (typische Größenordnung $\sim 10^3$ K) ist die Näherung der Aufgabe 2 nicht mehr anwendbar, stattdessen muss die Fermistatistik verwendet werden. Es ist dann bequemer, großkanonisch zu rechnen.

(a) Schreiben Sie das großkanonischen Potential Ω als die Summe über n. Berücksichtigen Sie auch die Spinentartung.

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck für Ω: bemerken Sie, dass man bei jedem gegebenen Wert n das effektive chemische Potential einfüren kann. Leiten Sie den foldgenden Ausdruck her

$$\Omega = 2\mu_B H \sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_n), \quad \mu_B = \frac{|e|}{2mc},$$

und finden Sie die Funktion $f(\mu_n)$.

(c) Benutzen Sie die Summationsformel von Euler-McLaurin

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} dx F(x) - \frac{1}{12}F'(a)$$

um die Summe über n auszuwerten. Zeigen Sie, dass das Ergebnis als

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}$$

geschrieben werden kann.

(d) Finden Sie einen Ausdruck für die Suszeptibilität. Vergleichen Sie die erhaltene Suszeptibilität mit der Pauli-Suszeptibilität, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben:

$$\chi_P = \mu_B^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V} .$$

Was ist die gesamte Suszeptibilität des Elektrongases? Ist das Gas para- oder diamagnetisch?