Winter-Semester 2017/18

Moderne Theoretische Physik IIIa

Statistische Physik

Dozent: Alexander Shnirman
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Do 11:30-13:00, Lehmann Raum 022, Geb 30.22

http://www.tkm.kit.edu/lehre/

Quantenzustände

z.B.

$$x_j \longrightarrow (\vec{r}_j, \sigma_j)$$

$$\lambda_j \longrightarrow \vec{p}_j$$

Produkt-Zustand von N Teilchen

$$\Psi = \phi_{\lambda_1}(x_1)\phi_{\lambda_2}(x_2)\ldots\phi_{\lambda_N}(x_N)$$

Hamilton-Operator von nicht wechselwirkenden Teilchen

$$\hat{H}(x_1,\ldots,x_N) = \sum_j \hat{h}(x_j)$$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

Ein-Teilchen-Hamilton-Operator

$$\hat{h}(x_j)\phi_{\lambda_j}(x_j) = \epsilon_{\lambda_j}\phi_{\lambda_j}(x_j)$$

$$E = \sum_j \epsilon_j$$

Noch mal M.-B.-Gas

kanonisch

$$Z = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N} e^{-\beta \sum_j \epsilon_{\lambda_j}} = \frac{1}{N!} \left(\sum_{\lambda} e^{-\beta \epsilon_\lambda} \right)^N = \frac{1}{N!} Z_1^N$$

großkanonisch

$$Z_G = \sum_N \frac{1}{N!} e^{\beta \mu N} Z_1^N = \exp\left(e^{\beta\mu} Z_1\right)$$

Noch mal M.-B.-Gas

$$Z_G = \sum_N \frac{1}{N!} e^{\beta\mu N} Z_1^N = \exp\left(e^{\beta\mu} Z_1\right) \qquad Z_1 = \sum_\lambda e^{-\beta\epsilon_\lambda}$$

anderseits **mit** $Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda} \frac{1}{n_\lambda!} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$

$$Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda = \prod_\lambda \left(\sum_{n_\lambda} \frac{1}{n_\lambda!} e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} \right) = \prod_\lambda \exp\left(e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}\right) = \exp\left(e^{\beta\mu} Z_1\right)$$

also

$$Z_G = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_\lambda} \frac{1}{n_1! n_2! \ldots n_\lambda!} e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$$

$$N = \sum_\lambda n_\lambda$$

n_λ - Zahl der Teilchen im Zustand λ

$$E = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda$$

Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \qquad\qquad E = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda} \frac{1}{n_\lambda!} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \exp\left[e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}\right]$$

Wahrscheinlichkeit, dass Zustand λ mit n_λ Teilchen besetzt ist

$$W_\lambda(n_\lambda) = \frac{1}{Z_\lambda}\frac{1}{n_\lambda!} e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)}$$

$$\langle n_\lambda\rangle = \sum_{n_\lambda} W_\lambda(n_\lambda) n_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda}\sum_{n_\lambda}\frac{1}{n_\lambda!} n_\lambda e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)} = e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}$$

$$\langle n_\lambda\rangle = e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}$$

Warum versagt M.-B.

Produkt-Zustand von N Teilchen $\Psi = \phi_{\lambda_1}(x_1)\phi_{\lambda_2}(x_2)\ldots\phi_{\lambda_N}(x_N)$

Zustand λ besetzt 3 mal $n_\lambda = 3$

$$\Psi = \ldots\phi_\lambda(x_j)\phi_\lambda(x_{j+1})\phi_\lambda(x_{j+2})\ldots$$

Permutationen zwischen x_j, x_{j+1}, x_{j+2} nicht nötig

$$Z_G = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_\lambda}\frac{1}{n_1!n_2!\ldots n_\lambda!}e^{-\beta\sum_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} \rightarrow \sum_{n_1}\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_\lambda}e^{-\beta\sum_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda}$$

$$Z_G = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_\lambda}e^{-\beta\sum_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda}e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda}$$

Das ideale Bose-Gas

Produkt-Zustand von N Teilchen **Symmetrisch**

$$\Psi = \frac{1}{Norm.} \sum_{\{P\}} \phi_{\lambda_1}(x_{P_1}) \phi_{\lambda_2}(x_{P_2}) \ldots \phi_{\lambda_N}(x_{P_N})$$

Der Zustand ist charakterisiert lediglich durch n_λ

$n_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ **Bosonen**

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$$

Das ideale Bose-Gas

Unabhängige Herleitung

Der Zustand ist charakterisiert lediglich durch n_λ

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \qquad E = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda \qquad n_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

Bosonen

$$Z_G(T, V, \mu) = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)} = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu)} \Longrightarrow Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda = 0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$$

Das ideale Bose-Gas

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda = \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass Zustand λ mit n_λ Teilchen besetzt ist

$$W_\lambda(n_\lambda) = \frac{1}{Z_\lambda} e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} = e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}\right)$$

$$\langle n_\lambda \rangle = \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} W_\lambda(n_\lambda) n_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda} \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} n_\lambda e^{-\beta n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1}$$

$$n_B(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

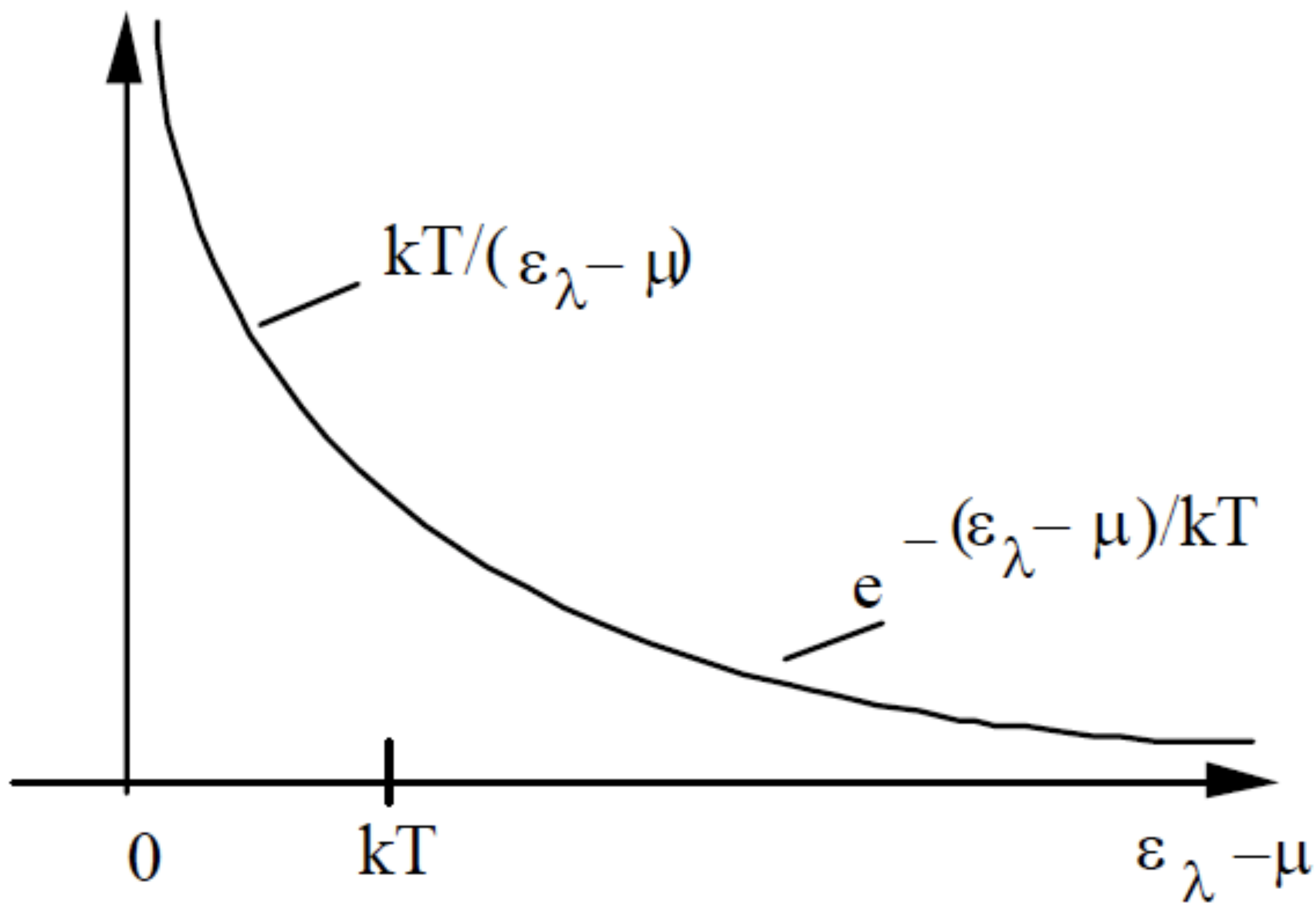
Bose-Funktion

Bose-Funktion

$$n_B(\epsilon_\lambda) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1}$$

Bose-Funktion

$$\mu \leq 0$$



Das ideale Fermi-Gas

Produkt-Zustand von N Teilchen Antisymmetrisch

$$\Psi = \frac{1}{Norm.} \sum_{\{P\}} (-1)^P \phi_{\lambda_1}(x_{P_1}) \phi_{\lambda_2}(x_{P_2}) \dots \phi_{\lambda_N}(x_{P_N})$$

Der Zustand ist charakterisiert lediglich durch n_λ

$n_\lambda = 0, 1$ Fermionen

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} \cdots \sum_{n_\lambda=0}^{1} e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}$$

Das ideale Fermi-Gas
Unabhängige Herleitung

Der Zustand ist charakterisiert lediglich durch n_λ

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \qquad E = \sum_\lambda n_\lambda \epsilon_\lambda \qquad n_\lambda = 0, 1$$

Fermionen

$$Z_G(T, V, \mu) = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)} = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} \Rightarrow Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda \equiv \sum_{n_\lambda = 0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$$

Das ideale Fermi-Gas

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_\lambda=0}^{1} e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = \prod_\lambda Z_\lambda$$

$$Z_\lambda = \sum_{n_\lambda=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu) n_\lambda} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}$$

Wahrscheinlichkeit, dass Zustand λ mit n_λ Teilchen besetzt ist

$$W_\lambda(n_\lambda) = \frac{1}{Z_\lambda} e^{-\beta n_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu)} = \frac{e^{-\beta n_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}}$$

$$\langle n_\lambda \rangle = \sum_{n_\lambda=0}^{1} W_\lambda(n_\lambda) n_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda} \sum_{n_\lambda=0}^{1} n_\lambda e^{-\beta n_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu)} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} + 1}$$

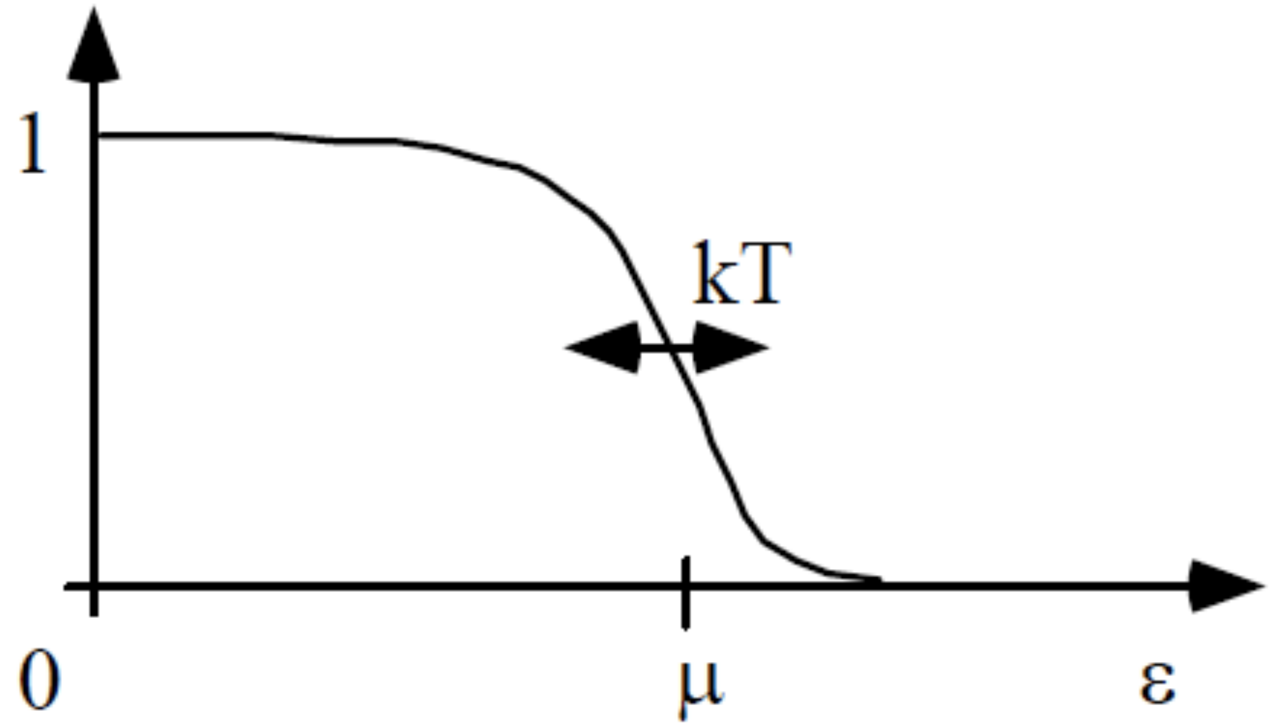
$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

Fermi-Funktion

Fermi-Funktion

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$$

Fermi-Funktion



Zusammenfassung

$$Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda$$

M.-B. $\quad Z_\lambda = \exp\left[e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}\right]$

Bose $\quad Z_\lambda = \dfrac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}}$

Fermi $\quad Z_\lambda = 1 + e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}$

$$\langle n_\lambda \rangle = \left| \begin{array}{l} n_{MB}(\epsilon_\lambda) = e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} \\ n_B(\epsilon_\lambda) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1} \\ n_F(\epsilon_\lambda) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} + 1} \end{array} \right.$$

M.-B.

Bose-Funktion

Fermi-Funktion