Theorie der Kondensierten Materie I WS 2017/2018

Prof. Dr. A. Mirlin, PD Dr. I. Gornyi
Dr. N. Kainaris, Dr. S. Rex, J. Klier

Blatt 12
Besprechung 25.01.2018

---

1. Fermi-Flüssigkeit (10+10=20 Punkte)

(a) Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Relation zwischen effektiver Masse m^* des Quasiteilchens und dem Landau-Parameter F_1^s:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F_1^s.$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Energie eines Quasiteilchens in einer Fermi-Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit anderen Quasiteilchen lautet:

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}\sigma} = \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k'}\sigma'} f_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k'}\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{k'}\sigma'}.$$

Man kann diese Energie als den Hamiltonian H des Quasiteilchens betrachten. Die quasiklassische Dynamik der Quasiteilchenverteilungsfunktion $n_{\boldsymbol{k}\sigma}(\boldsymbol{r}, t)$ wird dann durch die Hamilton-Liouville-Gleichung $\partial n/\partial t = \{H, n\}$ beschrieben, wobei $\{\ldots\}$ für die Poissonklammern steht.

Der Einfachheit halber ignorieren wir im Folgenden den Spin der Quasiteilchen (man kann z.B. eine spin-polarisierte Fermi-Flüssigkeit betrachten).

Berechnen Sie die Poissonklammern und linearisieren Sie die resultierende Gleichung für kleine $\delta n_{\boldsymbol{k}}$. Zeigen Sie, dass für $u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \int \delta n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}, \omega) dk$ gilt:

$$(\omega - \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}) u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v} \int \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{4\pi} F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') u(\hat{\boldsymbol{k}}'; \boldsymbol{q}, \omega), \tag{1}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{k}$ ist und $F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = \nu_F f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\big|_{|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|=k_F}$.

(c) **10 Bonuspunkte**

Betrachten Sie eine zweidimensionale Fermi-Flüssigkeit mit der isotropen Landau-Funktion $F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = F_0$. Lösen Sie die Gleichung von der Form (1) für diesen Fall.

2. Elektron-Phonon-Wechselwirkung (10+5+15=30 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die, durch Elektron-Phonon-Wechelwirkung hervorgerufene, effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung mit Hilfe einer kanonischen Transformation hergeleitet werden. Die Form der Wechselwirkung sollte aus der Vorlesung bekannt sein, wo sie mit anderen Mitteln hergeleitet wurde.

Eine kanonische Transformation eines Operators H ist definiert durch

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^{S}. \tag{2}$$

Wir betrachten nun einen Hamiltonoperator H_0 mit einer kleinen Störung V

$$H = H_0 + V. \tag{3}$$

Die Idee der kanonischen Transformation ist nun, den Operator S so zu wählen, dass der transformierte Hamiltonoperator $\tilde{H}$ keine Terme mehr enthält, die linear in der Störung V sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Form (2) äquivalent zu

$$\tilde{H} = H + [H, S] + \frac{1}{2}\left[[H, S], S\right] + ... \tag{4}$$

ist, wobei $[A, B]$ der Kommutator der Operatoren A und B ist. Zeigen Sie dabei, dass die Abwesenheit von linearen Termen $\mathcal{O}(V)$ im transformierten Hamiltonoperator $\tilde{H}$ der Forderung

$$V + [H_0, S] = 0 \tag{5}$$

entspricht.

(b) Benutzen Sie die Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators $\langle n|$ und zeigen Sie, dass die Matrixelemente von S als

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|V|m\rangle}{E_m - E_n} \tag{6}$$

geschrieben werden können. Zeigen Sie, dass für den transformierten Hamiltonoperator nun gilt

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2}[V, S] + O(V^3). \tag{7}$$

(c) Betrachten wir nun den aus der Vorlesung bekannten Fröhlich-Hamiltonoperator der Elektron-Phonon-Wechselwirkung,

$$H_{\text{e-ph}} = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\sigma} M(\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\sigma} c_{\boldsymbol{k},\sigma} \left(a_{\boldsymbol{q}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{q}}\right), \tag{8}$$

als Störung. Berechnen Sie mit Hilfe einer kanonischen Transformation den effektiven Hamiltonoperator. Werten Sie dazu die Matrixelemente von S bezüglich der Phononzustände aus. Da wir am Tieftemperaturverhalten interessiert sind, sind nur die Matrixelemente mit dem $T = 0$ Grundzustand $|0\rangle$ wichtig. Die Korrektur zum ungestörten Hamiltonoperator kann dann als effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung $V^{\text{eff}}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q})$ geschrieben werden. Bestimmen Sie $V^{\text{eff}}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q})$.