Theorie der Kondensierten Materie I WS 2017/2018

Prof. Dr. A. Mirlin, PD Dr. I. Gornyi
Dr. N. Kainaris, Dr. S. Rex, J. Klier

Blatt 13
Besprechung 01.02.2018

---

1. Radius des Cooper-Paars (8 Punkte)

Berechnen Sie den mittleren Radius $\sqrt{\langle \boldsymbol{r}^2 \rangle}$ des Cooper-Paars mit Gesamtimpuls $\boldsymbol{K} = 0$.

2. BCS-Grundzustand (10+10+5+5 = 30 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die BCS-Wellenfunktion lautet:

$$|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(u_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) |0\rangle. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle$ normiert ist, wenn $|u_{\boldsymbol{k}}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}}|^2 = 1$ für alle $\boldsymbol{k}$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N \rangle$ der Teilchenzahl $\hat{N} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$ und $\delta N = \sqrt{\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2}$ im BCS-Grundzustand (1).

(b) Berechnen Sie die Größe $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$ und zeichnen Sie diese Funktion in Abhängigkeit von k. Führen Sie dieselbe Rechnung für den Normalzustand $|\Phi_{\mathrm{FS}}\rangle$ durch. Finden Sie eine äquivalente Darstellung des Grundzustandes, in der Cooper-Paare im Fermi-See $|\Phi_{\mathrm{FS}}\rangle$ vernichtet, statt aus dem Vakuum $|0\rangle$ erzeugt werden.

(c) Berechnen Sie $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | b^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} b^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$, wobei die Operatoren $b^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} = u^*_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} - \sigma v^*_{\boldsymbol{k}} c_{-\boldsymbol{k},-\sigma}$, über die Bogoliubov-Transformation mit den gewöhnlichen Erzeugern- und Vernichternoperatoren der Quasiteilchen zusammenhängen.

(d) Berechnen Sie $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$ mit

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \xi_k c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} - \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} c^\dagger_{\boldsymbol{k}'\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}. \tag{2}$$

3. BCS-Variationsmethode (7+5=12 Punkte)

Wir möchten nun mit Hilfe der Variationsmethode die Grundgleichungen der BCS-Theorie herleiten. Dazu minimieren wir den Erwartungswert des Hamiltonoperators (2) aus der Aufgabe 1d bezüglich dem BCS-Grundzustand: $\delta \langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle = 0$.

(a) Setzen Sie $u_{\boldsymbol{k}} = \sin(\theta_{\boldsymbol{k}})$ und $v_{\boldsymbol{k}} = \cos(\theta_{\boldsymbol{k}})$ an. Variieren Sie den obigen Erwartungswert, indem Sie

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\boldsymbol{k}}} \langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle = 0$$

setzen, und zeigen Sie, dass dann folgt

$$\tan(2\theta_{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2\xi_{\boldsymbol{k}}} \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \sin(2\theta_{\boldsymbol{k}'}) = -\frac{\Delta_{\boldsymbol{k}}}{\xi_{\boldsymbol{k}}},$$

wobei $\Delta_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} u_{\boldsymbol{k}'} v_{\boldsymbol{k}'}$.

(b) Zeigen Sie, dass Sie hieraus folgende Selbstkonsistenz-Gleichung für $\Delta_{\boldsymbol{k}}$ erhalten:

$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \frac{\Delta_{\boldsymbol{k}'}}{\sqrt{\xi_{\boldsymbol{k}'}^2 + \Delta_{\boldsymbol{k}'}^2}}.$$

4. Bonusaufgabe: "Spielzeugmodell" des Supraleiters (10 Bonuspunkte)

Wir betrachten ein Elektron, das nur drei Zustände $\boldsymbol{k}_{1\uparrow}$, $\boldsymbol{k}_{2\uparrow}$ und $\boldsymbol{k}_{3\uparrow}$ annehmen kann und dessen Partner nur die Zustände $-\boldsymbol{k}_{1\downarrow}$, $-\boldsymbol{k}_{2\downarrow}$ und $-\boldsymbol{k}_{3\downarrow}$. Wir definieren die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger = c_{\boldsymbol{k}\uparrow}^\dagger c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^\dagger$, $b_{\boldsymbol{k}} = c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}$, und konstruieren mit diesen Operatoren den Hamiltonian:

$$\hat{H} = 2E_0 \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3} b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}} - \lambda \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} b_{\boldsymbol{k}'}^\dagger b_{\boldsymbol{k}}.$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung mit diesem Hamiltonian.