Theorie der Kondensierten Materie I WS 2017/2018

Prof. Dr. A. Mirlin, PD Dr. I. Gornyi
Dr. N. Kainaris, Dr. S. Rex, J. Klier

Blatt 9
Besprechung 21.12.2017

---

1. Debye-Waller-Faktor (8+3+6+5=22 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der dynamische Strukturfaktor $S(\boldsymbol{q},\omega)$ für die Neutronenstreuung an Kristallen durch die Debye-Waller-Faktor e^{-2W} unterdrückt wird, wobei $2W = \langle(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_0)^2\rangle = \left\langle(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_n(t))^2\right\rangle$.

Betrachten Sie Phononen mit dem Spektrum $\omega_j(q)$ im d-dimensionalen Kristall. Das Gitter besteht nur aus einem Atom (Masse M) pro Einheitszelle.

(a) Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für den Debye-Waller-Faktor für beliebige Temperatur T her.

(b) Schätzen Sie den Wert von W in drei-dimensionalen Kristallen bei $T = 300K$ für q in der Größenordnung des Debye-Wellenvektors ab.

(c) Analysieren Sie den Debye-Waller-Faktor in $d = 2$ und $d = 1$ für $T = 0$.

(d) Analysieren Sie den Debye-Waller-Faktor in $d = 2$ und $d = 1$ für $T > 0$.

2. Zweite Quantisierung: Bose-Statistik. (18 Punkte)

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right), \qquad [\hat{b},\hat{b}^\dagger] = 1.$$

Die thermische Mittelung $\langle ... \rangle$ ist durch

$$\langle\hat{O}\rangle = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\hat{O}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)}$$

definiert, wobei

$$\mathrm{Tr}(\hat{O}) = \sum_{m=0}^{\infty}\langle m|\hat{O}|m\rangle, \qquad |m\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}}|0\rangle.$$

Betrachten Sie den Operator

$$\hat{B} = \lambda^*\hat{b}^\dagger + \lambda\hat{b}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie dass

$$\left\langle \exp(\hat{B})\right\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\langle\hat{B}^2\rangle\right)$$

gilt.

3. Zweite Quantisierung: Fermi-Statistik. (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N nichtwechselwirkenden Fermionen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$. Das System befindet sich im 3d-Volumen V. Man kann den Dichte-Operator für Teilchen mit z-Komponente des Spins σ durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken:

$$\hat{n}(\mathbf{r},\sigma) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} a^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{k}',\sigma}.$$

Berechnen Sie die Korrelation der Teilchenzahldichte

$$\langle\Psi_0|\hat{n}(\mathbf{r}_1,\sigma_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2,\sigma_2)|\Psi_0\rangle$$

für $\sigma_1 = \sigma_2$ und $\sigma_1 \neq \sigma_2$.