KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2017/2018

Prof. Dr. A. Mirlin, PD Dr. I. Gornyi
Dr. N. Kainaris, Dr. S. Rex, J. Klier

Blatt 11
Besprechung 18.01.2018

---

1. Thomas-Fermi-Abschirmung in zwei Dimensionen (7+8=15 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Thomas-Fermi-Abschirmung in drei Dimensionen betrachtet. Betrachten Sie nun ein zweidimensionales Elektronensystem mit einer dreidimensionalen $(1/r)$ Coulomb-Wechselwirkung.

(a) Leiten Sie die Dielektrizitätsfunktion $\varepsilon(\mathbf{q})$ in der Thomas-Fermi-Näherung her. Bestimmen Sie die Abschirmung des Potentials einer äußeren Punktladung, die sich im Abstand a von der Ebene befindet.

(b) Eine zusätzliche Punktladung wird zur Zeit $t = 0$ in die Ebene eingefügt. Beschreiben Sie die resultierende zeitliche Entwicklung der Ladungsdichte.

2. Plasmonen und Teilchen-Loch-Kontinuum (8+7=15 Punkte)

(a) Der dynamische Strukturfaktor des freien Elektronengases im Grundzustand ist gegeben durch

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{qr}-\omega t)} S(\mathbf{r},t), \qquad S(\mathbf{r},t) = \langle\Psi_0|\,\rho(\mathbf{r},t)\rho(0,0)\,|\Psi_0\rangle\,,$$

mit der zeitabhängigen Teilchendichte $\rho(\mathbf{r},t) = \sum_\sigma \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r},t)\psi_\sigma(\mathbf{r},t)$.
Zeigen Sie, dass der Strukturfaktor übergeht in

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}} n_F(\mathbf{k})\,[1 - n_F(\mathbf{k}+\mathbf{q})]\,\delta\left(\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right),$$

mit $n_F(\mathbf{k}) = \theta(k_F - k)$ und k_F dem Fermi-Wellenvektor. Skizzieren Sie in der (q,ω)-Ebene den Bereich mit $S(\mathbf{q},\omega) \neq 0$.

(b) In dieser Teilaufgabe betrachten wir kollektive Anregungen eines 3D Elektronensystems. In der Vorlesung wurde die Plasmonenfrequenz $\omega_p(q = 0)$ abgeschätzt. Bestimmen Sie nun die volle Dispersion des plasmonischen Zweiges $\omega_p(q)$ als Funktion des Wellenvektors q für kleine q (gegenüber dem Thomas-Fermi-Wellenvektor k_{TF}).

3. Stoner-Ferromagnetismus (12+8=20 Punkte)

Die magnetische Suszeptibilität einer Fermi-Flüssigkeit divergiert im Grenzfall $F_0^a \to -1$ (Stoner-Instabilität gegenüber ferromagnetischer Ordnung). Betrachten Sie das System im ferromagnetischen Zustand. Jetzt zeichnet sich das System durch eine endliche Magnetisierung aus. Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{m}$ der Einheitsvektor in Richtung der Magnetisierung ist. Die Energie eines Quasiteilchens hängt von der Orientierung des Spins des Teilchens bezüglich $\boldsymbol{m}$ ab und kann in Matrixform ausgedrückt werden: $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\sigma}) = \epsilon_0(\boldsymbol{k})\mathbb{1} - b(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{m}$. Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$, wobei $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind.

(a) Die Verteilungsfunktionen für Quasiteilchen mit Spin parallel und antiparallel zu $\boldsymbol{m}$ können wie $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\sigma})$ als eine einzige 2×2 Matrix-Verteilungsfunktion $\hat{n}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\sigma})$ geschrieben werden. Drücken Sie $\hat{n}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\sigma})$ durch $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{m}$ aus. Finden Sie die Beziehung zwischen der Funktion $b(\boldsymbol{k})$ und der Landau-Funktion $f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Änderung der Quasiteilchenenergie aufgrund einer infinitesimalen Rotation der Magnetisierung, $\delta \boldsymbol{m} = [\boldsymbol{\delta\theta} \times \boldsymbol{m}]$, wobei $\delta\theta$ der kleine Drehwinkel ist.

(b) Benutzen Sie das Ergebnis aus (a) um das Kriterium der Stoner-Instabilität herzuleiten.