

8. Supraleitung

- 1911 H. Kamerling Onnes : Entdeckung der Supraleitung von Quecksilber (Hg), $T_c \approx 4,2 K$
- 1933 Meißner (-Ochsenfeld)-Effekt : Verdrängung des Magnetfeldes aus einem Supraleiter
- 1935 F. und H. London : London-Gleichungen, Elektrodynamik von Supraleitern (phänom. Theorie)
- 1950 Ginzburg-Landau-Theorie ; phänomenologische Theorie, ist von sehr allgemeiner Bedeutung für die Beschreibung von Phasenübergängen und kritischen Phänomenen
- 1956 Cooper Cooper-Instabilität : gebundene Zustände bei e-e-Ww
- 1957 Bardeen, Cooper, Schrieffer (BCS) : mikroskopische Theorie der Supraleitung
- 1962 Josephson (22 Jahre alt) Wichtigkeit der Phase des supral. Kondensat
Josephson-Effekt: Tunneln von Cooperpaaren

8.1. Cooper-Instabilität: Cooper-Paare

Modellproblem mit exakter Lösung, besteht aus:

- Fermiwellen freier (nicht-wechselwirkender) Elektronen
- Zwei Elektronen mit einer anziehender Ww

Die Rolle der Fermiwellen ist die Blockade der Zustände mit Energien $E_k < E_F$

D.h., wir suchen die Wellenfunktion in der Form

$$|\Psi\rangle = \sum_{\substack{k_1, k_2 > k_F \\ \sigma_1, \sigma_2}} \psi(k_1, k_2, \sigma_1, \sigma_2) C_{k_1, \sigma_1}^+ C_{k_2, \sigma_2}^+ |\Phi_0\rangle ,$$

$$|\Phi_0\rangle = \sum_{k \leq k_F; \sigma} C_{k, \sigma}^+ |0\rangle - \text{gefülltes Fermiwellen}$$

Gesamtimpuls $\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ - erhaltene Größe

Grundzustand: $\vec{K} = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$

$$\Phi(k, -k, \sigma_1, \sigma_2) = \psi(k) \chi(\sigma_1, \sigma_2)$$

Modellwechselwirkung

$$g_{\vec{k}, \vec{k}'} = \begin{cases} -g, & 0 < \xi_k, \xi_{k'} < \hbar\omega_D \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\xi_k = \epsilon_k - \epsilon_F$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g > 0 \\ \text{Anziehung} \end{array}}$$

$$H = H_0 + H_{ee}; \quad H_{ee} = -\frac{g}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{k} \neq \vec{k}'}} C_{\vec{k}\sigma}^+ C_{-\vec{k}'\sigma'}^+ C_{-\vec{k}'\sigma} C_{\vec{k}\sigma}$$

Schrödinger-Gleichung

$$\rightarrow \boxed{2\epsilon_k \psi_k - \frac{g}{V} \sum_{\substack{k' \\ k': 0 < \xi_{k'} < \hbar\omega_D}} \psi_{k'} = E \psi_k}$$

$$\text{Wir definieren } C = \frac{1}{V} \sum_{0 < \xi_k < \hbar\omega_D} \psi_k$$

$$\Rightarrow \psi_k = \frac{gC}{2\epsilon_k - E}$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{V} gC \sum_{0 < \xi_k < \hbar\omega_D} \frac{1}{2\epsilon_k - E}$$

$$1 = \frac{g}{V} \sum_{\epsilon_F < \epsilon_k < \epsilon_F + \hbar\omega_D} \frac{1}{2\epsilon_k - E}$$

$$1 = g \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} dE \gamma(E) \frac{1}{2\epsilon_k - E}$$

$$\simeq \gamma(\epsilon_F) \equiv \gamma_0$$

$$\frac{1}{g^{\gamma_0}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2E_F + 2\hbar\omega_D - E}{2E_F - E}$$

$$\rightarrow \delta E \equiv E - 2E_F = - \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/g^{\gamma_0}} - 1} \approx - 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{g^{\gamma_0}}} < 0$$

Energieabsenkung: gebundener Zustand:
Cooper-Paar

Bindungsenergie per Elektron:

$$\Delta = \frac{1}{2} |\delta E| = \hbar\omega_D e^{-\frac{2}{g^{\gamma_0}}}$$

bei schwacher Ww: $g^{\gamma_0} \ll 1$

Kommentare: (i) Wir haben oben angenommen, dass die Ww $\vec{g}_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\perp}$ unabhängig von der Richtung \vec{E}, \vec{E}' ist und haben als Folge bekommen $\psi_{\vec{k}}$ unabhängig von \vec{k} \rightarrow s-Wellen-Symmetrie ($L=0$)

Ortsanteil symmetrisch \Rightarrow Spinanteil antisymmetrisch
der Wellenfunktion $(S=0)$ - Spin-Singlett

Völlig analog kann man Anziehung im Kanal mit $L=1, 2, \dots$ annehmen

$L=0$	s-Wellen	$S=0$	Spin-Singlett
$L=1$	p-Wellen	$S=1$	Spin-Triplett
$L=2$	d-Wellen	$S=0$	Spin-Singlett usw.

(ii) nicht-analytische Abhängigkeit der Bindungsenergie Δ von g \rightarrow Störungstheorie nicht anwendbar

(iii) ohne den "Blockadeeffekt" gibt es keinen gebundenen Zustand in 3D für ein schwaches Potential ($g^{\gamma_0} \ll 1$)

8.2. BCS - Theorie

Jetzt das gesamte Vielteilchenproblem

$$H_G = H - \mu N =$$

↑ grandkanonisch

$$= \sum_{k\sigma} \xi_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \frac{1}{2} \frac{g}{V} \sum_{k_1, k_2, \sigma_1, \sigma_2} C_{k_1+q, \sigma_1}^+ C_{k_2-q, \sigma_2}^+ C_{k_2, \sigma_2} C_{k_1, \sigma_1}$$

$$|\epsilon_{k_1+q} - \epsilon_{k_1}| < \hbar\omega_D$$

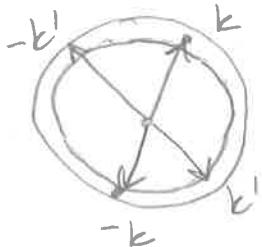
Anziehung

Die Anziehung ist viel effizienter für Elektronenpaare
mit $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 \approx 0$

(Cooper-Paare)

s-Wellen-Paarung

→ Singulett $\rightarrow \sigma_1 = -\sigma_2$



→ reduzierter Hamiltonoperator (BCS)

$$H_{BCS} = \sum_{k\sigma} \xi_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{kk'} C_{k', \uparrow}^+ C_{-k', \downarrow}^+ C_{-k, \downarrow} C_{k, \uparrow}$$

$$-\hbar\omega_D < \xi_k, \xi_{k'} < \hbar\omega_D$$

$$C^+ C^+ C C \rightarrow \langle C^+ C^+ \rangle C C + C^+ C^+ \langle C C \rangle \\ - \langle C^+ C^+ \rangle \langle C C \rangle$$

Molekularfeld-Näherung:

$$H \rightarrow H_{eff} = \sum_{k\sigma} \xi_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \Delta^* \sum_k C_{-k, \downarrow} C_{k, \uparrow} - \Delta \sum_{k'} C_{k', \uparrow}^+ C_{-k', \downarrow}$$

$$+ \frac{1 \Delta^2 / V}{g}$$

$$\Delta = \frac{g}{V} \sum_k \langle C_{-k, \downarrow} C_{k, \uparrow} \rangle$$

$$\Delta^* = \frac{g}{V} \sum_{k'} \langle C_{k', \uparrow}^+ C_{-k', \downarrow} \rangle$$

Hier wurden nur anomale Erwartungswerte berücksichtigt

Bogoliubov-Transformation:

$$\begin{aligned} b_{k\sigma} &= u_k c_{k\sigma} - \sigma v_k^* c_{-k,-\sigma}^+ \\ b_{k\sigma}^+ &= u_k^* c_{k\sigma}^+ - \sigma v_k c_{-k,-\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{k\sigma} = u_k b_{k\sigma} + \sigma v_k b_{-k,-\sigma}^+ \\ c_{k\sigma}^+ = u_k^* b_{k\sigma}^+ + \sigma v_k^* b_{-k,-\sigma} \end{aligned}$$

$$\{b_{k\sigma}, b_{k'\sigma'}^+\} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \rightarrow |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \sum_{k\sigma} \xi_k [u_k^* b_{k\sigma}^+ + \sigma v_k^* b_{-k,-\sigma}] [u_k b_{k\sigma} + \sigma v_k b_{-k,-\sigma}^+] \\ &\quad - \left\{ \Delta^* \sum_k [u_{-k} b_{-k\downarrow} - v_{-k} b_{k\uparrow}^+] [u_k b_{k\uparrow} + v_k b_{-k\downarrow}^+] + \text{h.c.} \right\} \end{aligned}$$

+ const

Die u_k, v_k werden so bestimmt, daß die bb und b^+b^+ Terme verschwinden \rightarrow

$$\xi_k (v_k^* u_k + v_{-k}^* u_{-k}) - \Delta^* u_{-k} u_k + \Delta v_{-k} v_k^* = 0 \quad (\text{Term } b_{-k\downarrow} b_{k\uparrow})$$

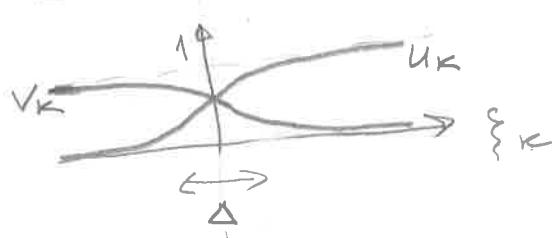
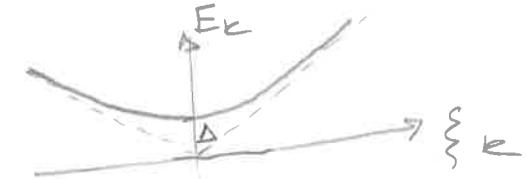
Es reicht zu betrachten

$$\Delta = \Delta^*, \quad u_{-k} = u_k = u_k^*, \quad v_{-k} = v_k = v_k^*$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\xi_k v_k u_k - \Delta (u_k^2 - v_k^2) = 0 \\ u_k^2 + v_k^2 = 1 \end{cases}$$

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right)}$$

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$$



$$v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right)}$$

$$H_{\text{eff}} = \sum_{k\sigma} E_k b_{k\sigma}^+ b_{k\sigma} + \text{const}$$

- * Bogoliubov- Quasiteilchen mit dem Spektrum E_k
- * Energiefülle $|\Delta|$
- Grundzustand $|\Phi_{\text{BCS}}\rangle$: $b_{k\sigma} |\Phi_{\text{BCS}}\rangle = 0$
für alle k, σ

$$|\Phi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\vec{k}} (u_k + v_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) |0\rangle$$

Selbstkonsistenzgleichung

$$\Delta = \frac{g}{V} \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle = \frac{g}{V} \left[\underbrace{[u_{-k} b_{-k\downarrow} - v_{-k} b_{k\uparrow}^+] \cdot [u_k b_{k\uparrow} + v_k b_{-k\downarrow}^+]}_1 \right]$$

$$= \frac{g}{V} \sum_k u_k v_k \underbrace{\langle b_{-k\downarrow} b_{-k\downarrow}^+ \rangle}_1 = \frac{g}{V} \sum_k u_k v_k$$

$$\Delta = \frac{g}{2V} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{g\tau_0}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = g\tau_0 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} =$$

$$= g\tau_0 \int_0^{\hbar\omega_D/\Delta} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = g\tau_0 \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \Big|_0^{\hbar\omega_D/\Delta}$$

$$\approx g\tau_0 \ln \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}$$

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\tau_0 g}}$$

$\hbar\omega_D \gg \Delta$
 $(g\tau_0 \ll 1)$

Lücke bei $T=0$

8.3. BCS Theorie bei endlichen Temperaturen

Selbstkonsistenzgleichung

$$\Delta = \frac{g}{V} \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle = \frac{g}{V} \sum_k \langle [u_{-k} b_{-k\downarrow} - v_{-k} b_{k\uparrow}^+] \rangle.$$

$$\cdot \langle [u_k b_{k\uparrow} + v_k b_{-k\downarrow}^+] \rangle = \frac{g}{V} \sum_k u_k v_k \langle b_{-k\downarrow} b_{-k\downarrow}^+ - b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow} \rangle =$$

$$= \frac{g}{V} \sum_k u_k v_k (1 - 2 n_k); \quad n_k = f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1}$$

↑
war = 0 bei T = 0 $E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$

$$u_k v_k = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \rightarrow \boxed{\Delta = \frac{g}{V} \sum_k \frac{\Delta}{2E_k} \tanh \frac{\beta E_k}{2}},$$

$$1 = \frac{g \gamma_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\beta \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2}$$

γ_0 - Zustandsdichte per Spin

Um T_c zu bestimmen, setzen wir $\Delta = 0$ ein:

$$1 = \frac{g \gamma_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \tanh \frac{\xi}{2k_B T_c}$$

- ∞

$$= \frac{g \gamma_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \tanh x$$

- ∞

$$= 2 \left(\ln \frac{\pi}{2 k_B T_c} - \ln \frac{\pi}{4 e^\gamma} \right)$$

$\gamma = 0,5772$
Eulersche Konstante

$$\Rightarrow k_B T_c = \frac{2e^\delta}{\pi} \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{\hbar \omega_D}}$$

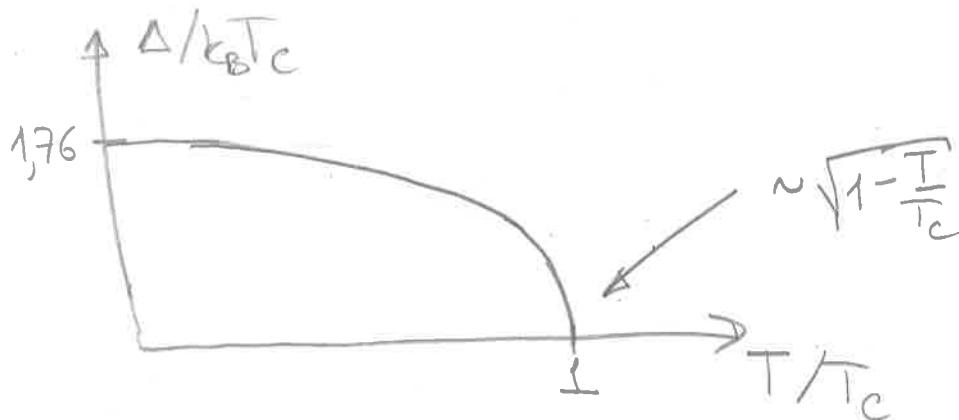
$$\approx 1,14 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{\hbar \omega_D}}$$

$$\frac{\Delta(T=0)}{k_B T_c} = \frac{\pi}{e^\delta} = 1,76$$

In der Nähe von T_c : $T < T_c$; $T_c - T \ll T_c$:
Entwicklung der Gleichung nach Potenzen von Δ :

$$\frac{1}{g\gamma_0} = \int_0^{\hbar \omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \approx \underbrace{\int_0^{\hbar \omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \tanh \frac{\xi}{2k_B T}}_{+ \int_0^{\hbar \omega_D} d\xi \Delta^2 \frac{\partial}{\partial(\Delta^2)} \left(\frac{1}{E} \tanh \frac{E}{2k_B T} \right) \Big|_{\Delta=0}} \ln \frac{2e^\delta}{\pi} \frac{\hbar \omega_D}{k_B T}$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\Delta(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7\xi(3)} \right)^{1/2} k_B T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}$$



Im Limes $g\gamma_0 \ll 1$ (d.h. $k_B T_c \ll \hbar \omega_D$)

ist $\Delta/k_B T_c$ eine universelle Funktion von T/T_c

$$\frac{\Delta(T)}{k_B T_c} = \delta\left(\frac{T}{T_c}\right)$$

$\underset{\mathbb{R}}{\text{universell}}$

Beweis:

$$\frac{1}{g\gamma_0} = \int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_c} \frac{dx}{x} \tanh \frac{x}{2} + \int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_c} dx \left[\frac{\tanh \frac{\sqrt{x^2 + \delta^2}}{2T/T_c}}{\sqrt{x^2 + \delta^2}} - \frac{\tanh \frac{x}{2}}{x} \right]$$

$x = \xi/k_B T_c$

$$= \frac{1}{g\gamma_0}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_c} dx []$$

$\frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} \gg 1$; \int konvergiert für $x \rightarrow \infty \Rightarrow$ man kann die Integration bis ∞ erweitern

$$\int_0^{\infty} dx [] = 0 \Rightarrow \delta = \delta \left(\frac{T}{T_c} \right)$$

Isotopen-Effekt

$$T_c, \Delta(T=0) \propto \omega_D \propto M^{-1/2}$$

↑ Ionenmasse

Kann experimentell überprüft werden
(verschiedene Isotope des gleichen chemischen Elements).

Ist in vielen "üblichen" Supraleitern gut erfüllt
→ Hinweis auf den E-Ph-Mechanismus der Paarung

8.4 Thermo dynamische Eigenschaften

Entropie

$$S = -2k_B \sum_{\text{Spin } E} \left[f(E_c) \ln f(E_c) + [1-f(E_c)] \ln [1-f(E_c)] \right]$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/k_B T} + 1}$$

Spezifische Wärme

$$C_V = \frac{1}{V} T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = - \frac{2k_B T}{V} \sum_k \frac{\partial f(E_k)}{\partial T} \ln \underbrace{\frac{f(E_k)}{1-f(E_k)}}_{= -E_k/k_B T} = - \frac{2}{V} \sum_k E_k \frac{\partial f(E_k)}{\partial T}$$

$$g(x) = \frac{1}{e^x + 1} ; \quad f(E_k) = g\left(\frac{E_k}{k_B T}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial E_k} = g'\left(\frac{E_k}{k_B T}\right) \frac{1}{k_B T}$$

$$\frac{\partial f(E_k)}{\partial T} = g'\left(\frac{E_k}{k_B T}\right) \cdot \left(\frac{1}{E_k} \frac{\partial E_k}{\partial T} - E_k \frac{1}{k_B T^2} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial E_k} \left(\frac{\partial E_k}{\partial T} - \frac{E_k}{T} \right) = \frac{\partial f}{\partial E_k} \left(-\frac{E_k}{T} + \frac{\Delta}{E_k} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)$$

$$E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{2}{V} \sum_k E_k \left(-\frac{E_k}{T} + \frac{\Delta}{E_k} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right) \frac{\partial f}{\partial E_k}$$

Grenzfälle:

i) $T \rightarrow T_c$

$$C_V(T_c) = 2 \int_0^\infty d\xi \left(-\frac{\xi^2}{T} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \int_0^\infty d\xi \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\Delta(T) \approx \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\gamma(3)}} k_B T_c \sqrt{1-T/T_c} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} & \left| \begin{array}{l} = -\frac{8\pi^2}{7\gamma(3)} k_B^2 T \\ T=T_c-0 \end{array} \right. \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} & \left| \begin{array}{l} = 0 \\ T=T_c+0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_V(T_c - 0) = C_V(T_c + 0) + \Delta C_V$$

$$C_V(T_c + 0) = \frac{2\pi^2}{3} v_0 k_B^2 T_c$$

übliche Formel für
freie Fermionen;
 $2v_0$ - Zustandsdichte
(mit Spinfaktor 2)

$$\Delta C_V = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} v_0 k_B^2 T_c$$

$$\frac{\Delta C_V}{C_V(T_c + 0)} = \frac{12}{7\zeta(3)} \simeq 1,43 \quad \text{universelle Größe}$$

ii) $T \ll T_c$

Lücke $\Delta(T) \simeq \Delta(0)$ im Spektrum

$$\Rightarrow C_V \propto e^{-\Delta/k_B T} \quad \Delta = \Delta(0)$$

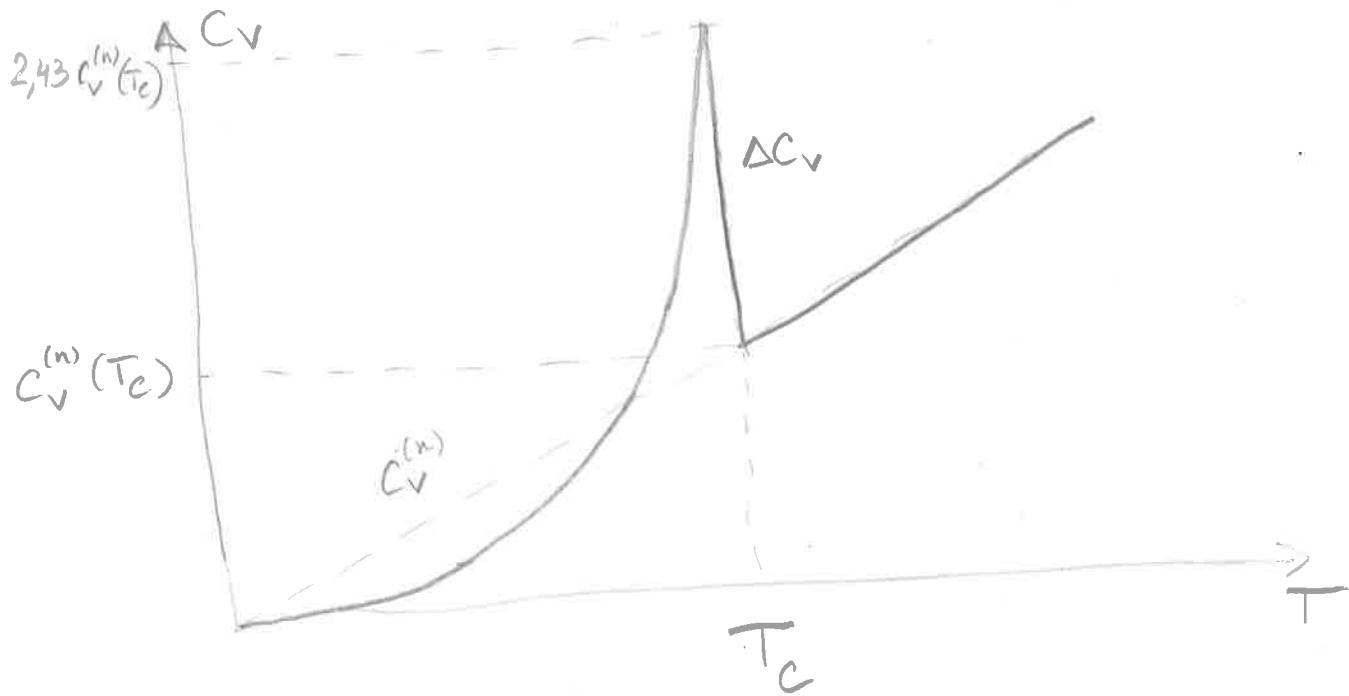
Genauere Berechnung:

$$f(E_k) \simeq e^{-E_k/k_B T} \simeq e^{-\frac{1}{k_B T} \left(\Delta + \frac{1}{2} \frac{\xi_k^2}{\Delta} \right)}$$

$$\begin{aligned} C_V(T) &= \frac{2}{V} \sum_k E_k \left(-\frac{E_k}{T} + \frac{\Delta}{E_k} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right) \frac{\partial f}{\partial E_k} \\ &\simeq -\frac{2}{V} \frac{\Delta^2}{T} \sum_k \frac{\partial f}{\partial E_k} = 2 \frac{\Delta^2}{k_B T^2} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \underbrace{\frac{1}{V} \sum_k e^{-\frac{\xi_k^2}{2\Delta k_B T}}}_{\sim \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/2\Delta k_B T}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \simeq v_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/2\Delta k_B T} = v_0 \sqrt{2\pi \Delta k_B T}$$

$$C_V = \sqrt{8\pi} v_0 \frac{\Delta^{5/2}}{k_B T^{3/2}} e^{-\Delta/k_B T}, \quad \Delta \equiv \Delta(0)$$

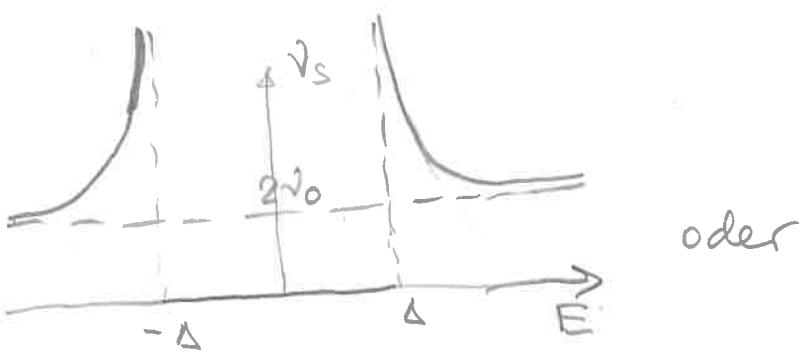


8.5. Zustandsdichte der Bogoliubov-Quasiteilchen

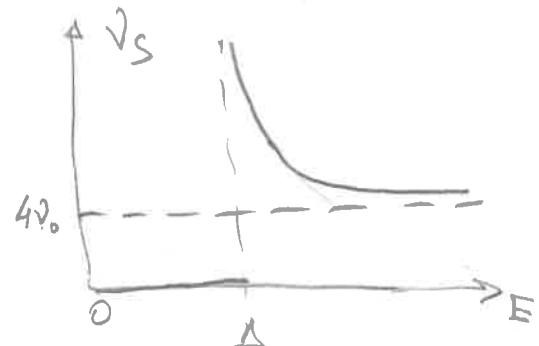
$$v_s(E) dE = \underbrace{v_n(\xi) d\xi}_{\simeq 2v_0} ; \quad E = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$$

supercond Spin

$$\rightarrow v_s(E) = 2v_0 \frac{d\xi}{dE} = 2v_0 \times \begin{cases} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, & E > \Delta \\ 0, & E < \Delta \end{cases}$$



oder



(zusätzlicher Faktor 2)
[Teilchen und Löcher]

Lücke 2Δ für Anregung
eines Quasiteilchenpaares

Kriterium der Supraleitfähigkeit (Landau)

$$\rightarrow \vec{v}$$

$$\leftarrow \vec{v}$$

Ruhendes Bezugssystem
 \vec{P}', \vec{E}'

bewegtes System \vec{P}, \vec{E}

Anregung:
 Quantenteilchen $\vec{p}, e(\vec{p})$

$$\rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p} \quad \Delta \vec{E} = e(\vec{p}) \quad] \begin{array}{l} \text{Änderung} \\ \text{der} \\ \text{Energie} \\ \text{und Impuls} \\ \text{des gesamten} \\ \text{Systems} \end{array}$$

Galileitransformation:

$$\vec{P}' = \vec{P} + M \vec{v} \quad (\Delta M = 0)$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{P} \cdot \vec{v} + \frac{M V^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta E' = \Delta E + \vec{\Delta p} \cdot \vec{v} = e(\vec{p}) + \vec{v} \cdot \vec{p}$$

$$(\Delta E')_{\min} = e(p) - v p$$

Kriterium der Supraleitfähigkeit:

$$(\Delta E')_{\min} > 0 \Leftrightarrow v < \min \left(\frac{e(p)}{p} \right) = v_c$$

↑
Kritische Geschwindigkeit

Fermi-Flüssigkeit:



Teilchen - Loch - Anregungen

e - beliebig klein bei beliebigem

$$p \in [0, 2p_F]$$

$\Rightarrow v_c = 0 \Rightarrow$ endliche Viskosität [Widerstand]
 keine Supraleitfähigkeit

$$\underline{\text{BCS}}: \text{Lücke } 2\Delta \Rightarrow v_c = \frac{2\Delta}{2p_F} = \frac{\Delta}{p_F} > 0$$

\rightarrow keine Viskosität für $v < v_c$

\rightarrow Widerstand = 0 \rightarrow Supraleitung

8.6. Elektrodynamik der Supraleiter:

London-Gleichungen und Meissner-Effekt

Phänomenologische Theorie; Herleitung aus der mikrosk. BCS-Theorie folgt.

Wir nehmen an, dass Elektronen ohne Reibung (Widerstand) durch das elektr. Feld beschleunigt werden:

$$m\ddot{\vec{v}} = e\vec{E} \quad | \Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}\psi$$

Eichung $\varphi = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb)

$$\rightarrow \vec{j} = -\frac{ne^2}{mc}\vec{A}$$

$$\rightarrow \text{rot } \vec{j} = -\frac{ne^2}{mc}\vec{B}$$

London-Ansatz $\vec{j} = -\frac{n_s e^2}{mc}\vec{A}$, (*)

n_s - Dichte der supraleitenden Elektronen.

Bei $T=0$ $n_s = n$;

Bei $0 < T < T_c$ $0 < n_s^{(T)} < n$; $n_s(T) + n_n(T) = n$.

Dichte der normalen Elektronen

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{j} = \frac{n_s e^2}{m}\vec{E} \\ \text{rot } \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{mc}\vec{B} \end{array} \right.$$

Bemerkung: die Gleichung (*) kann äquivalent durch Cooperpaare ausgedrückt werden:
 $n_s \rightarrow \frac{n_s}{2}; e \rightarrow 2e; m \rightarrow 2m$

Statische Felder

$$\rightarrow \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\rightarrow \text{rot rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B}}$$



$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B} \quad (x > 0)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(x) = \vec{B}_0 e^{-x/\lambda_L}}$$

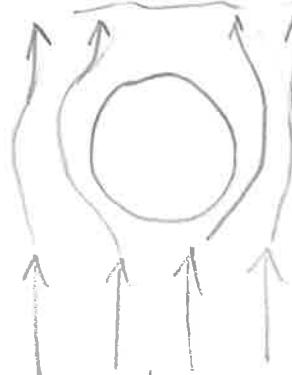
$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$$

Londonsche
Eindringtiefe

Meißner-(Ochsenfeld)-Effekt: Magnetfeld ist aus dem Inneren des Supraleiters verdrängt, ist nur in einer dünnen Schicht an der Oberfläche spürbar [→ Higgs-Mechanismus, siehe unten]

Genauso, $\vec{\nabla}^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc} \vec{j} \Rightarrow$ Superstrom fließt auch nur in dieser dünnen Schicht

Kritisches Magnetfeld



Das ist der Fall, solange das System durch das Verdrängen des Magnetfeldes die freie Energie gewinnt, d.h.

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{bind}} = 0 \quad "H" = 4\pi M$$

$$F_S + \frac{B_{\text{bind}}^2}{8\pi} < F_n \quad \rightarrow \quad \vec{B}_{\text{bind}} = -\vec{H}$$

F_S, F_n - freie Energiedichte im S/Zustand
 $\frac{B_{\text{bind}}^2}{8\pi}$ - Energie von induzierten Strömen, die im S-Zustand das Feld \vec{H} abschirmen (kompenzieren)

-129a-

$$F_S + \frac{B_{\text{bind}}^2}{8\pi} < F_n$$

Energie von induzierten Strömen,
die im S-Zustand das Feld \vec{H} abschirmen

s: $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{bind}} = 0$
 $\vec{H} \quad " \quad 4\pi M$
 $\Rightarrow \vec{B}_{\text{bind}} = -\vec{H}$

$\rightarrow H < H_c, \quad H_c^2 = 8\pi (F_n - F_S)$

Alternative (aber äquivalente) Herleitung:

Thermodynamik in einem Magnettfeld

\vec{H} - externes Feld, $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ - mikroskopisches Feld

Freie Energie $F(T, V, \vec{B})$; $dF = -SdT - pdV + \frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B}$

Da es nicht \vec{B} sondern das externe Feld \vec{H} angegeben ist
soll man die Legendre Transformation durchführen:

$$F(T, V, \vec{B}) \rightarrow F_H(T, V, \vec{H}) = F - \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{4\pi}$$

$$dF_H = dF_0 - \frac{1}{4\pi} \vec{B} d\vec{H}$$

Freie Enthalpie
= Gibbsche
freie Energie

Falls $\vec{B} = \mu \vec{H}$: $F_H = F_0 - \frac{\mu H^2}{8\pi} = F_0 - \frac{B(H)H}{8\pi}$

[vgl. mit $F = F_0 + \frac{B^2}{8\pi\mu} = F_0 + \frac{H(B)B}{8\pi}$]

Phasenübergang zwischen n und s Zustand:

$$F_{H,n} = F_{H,s} \rightarrow H = H_c$$

n: $\mu = 1$, $F_{H,n} = F_{0,n} - \frac{H^2}{8\pi}$

s: $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$, $F_{H,s} = F_{0,s}$

$$F_{0,n} - \frac{H_c^2}{8\pi} = F_{0,s} \rightarrow \boxed{\frac{H_c^2}{8\pi} = F_{0,n} - F_{0,s}}$$

In Übereinstimmung mit dem Ergebnis
oben auf dieser Seite

Kritisches Magnetfeld:

$$H_C^2 = 8\pi (F_n - F_s)$$

$$\underline{T=0} : F_{n,s} = E_{n,s}$$

$$E_s - E_n = E_{BCS} - E_n \equiv \Delta E$$

$$E_{BCS} = \frac{1}{V} \langle BCS | H_{BCS} | BCS \rangle$$

$$= \frac{1}{V} \left[2 \sum_k \xi_k v_k^2 - \frac{\Delta}{\sqrt{V}} \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \right] =$$

$$= \frac{1}{V} \left[2 \sum_k \xi_k v_k^2 - \Delta \sum_k u_k v_k \right]$$

$$E_n = \frac{1}{V} \langle \text{norm} | H_{BCS} | \text{norm} \rangle = \frac{2}{V} \sum_k \xi_k \theta(-\xi_k)$$

$$\Delta E = \frac{1}{V} \sum_k \left[2 \xi_k (v_k^2 - \theta(-\xi_k)) - \Delta u_k v_k \right] =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_k \left[2 \xi_k \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_k}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} - \theta(-\xi_k) \right) - \Delta^2 / 2\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2} \right]$$

$$= 2v_0 \int_0^{\omega_D} d\xi \left[\xi - \frac{\xi^2}{\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}} - \frac{\Delta^2}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}} \right]$$

$$\int_0^{\omega_D/\Delta} dx \dots \simeq \int_0^\infty dx \dots = -1/4$$

$$\langle BCS \rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) |0\rangle$$

$$H_{BCS} = \sum_{kk'} \xi_k c_{k\uparrow}^+ c_{k\downarrow} - \frac{\Delta}{\sqrt{V}} \sum_{kk'} [c_{k'\uparrow}^+ c_{-k'\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}]$$

$$\Delta = \frac{\Delta}{V} \sum_k u_k v_k$$

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right)}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right)}$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\xi_k^2}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}}$$

$$u_k v_k = \frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}}$$

$$x = \xi/\Delta \quad \omega_D/\Delta$$

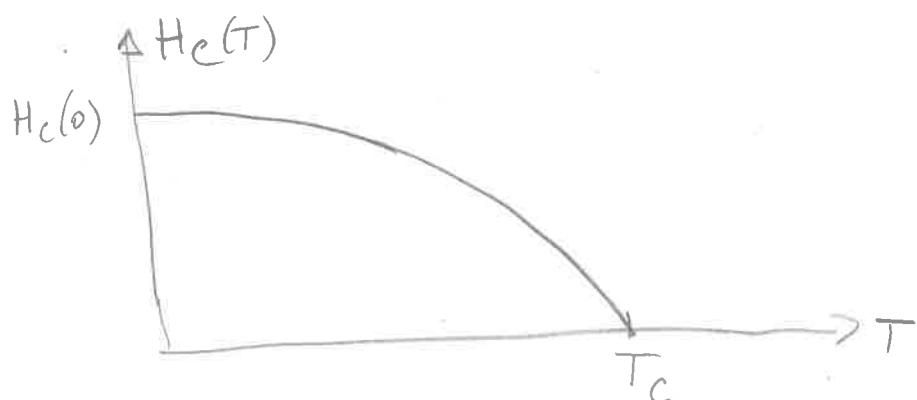
$$\downarrow \quad = 2v_0 \Delta^2 \int_0^{\omega_D/\Delta} dx \left(x - \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\Delta E \approx -\frac{1}{2} v_0 \Delta^2$$

Energie $\sim \Delta$ pro Elektron im Energiefenster $\sim \Delta$

$$\Rightarrow H_C(T=0) = 2\sqrt{\pi v_0} \Delta(T=0)$$

Für $T \rightarrow T_c - 0$ $H_c(T) \simeq 1,735 H_c(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$
 (ohne Herleitung; siehe z.B. Abrikosov)



8.7. Herleitung der London-Gleichungen und Berechnung von n_s aus der BCS-Theorie

$$H_{\text{kin}} = \sum_{\sigma} \int d\vec{r} \Psi_{\sigma}^+(\vec{r}) \frac{(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} \Psi_{\sigma}(\vec{r})$$

minimale
Ankopplung
ans el/mag Feld;
Ladung $-e$

$$\vec{j}(\vec{r}) = -C \frac{\delta H_{\text{kin}}}{\delta A(\vec{r})} \quad \vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{i\hbar e}{2m} \sum_{\sigma} \left[\Psi_{\sigma}^+(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi_{\sigma}(\vec{r}) - [\vec{\nabla} \Psi_{\sigma}^+(\vec{r})] \cdot \Psi_{\sigma}(\vec{r}) \right]$$

$$- \frac{e^2}{mc} \vec{A}(\vec{r}) \sum_{\sigma} \underbrace{\Psi_{\sigma}^+(\vec{r}) \Psi_{\sigma}(\vec{r})}_{n(\vec{r})}$$

$$= \vec{j}_1(\vec{r}) + \vec{j}_2(\vec{r}) ; \quad \vec{j}_2(\vec{r}) = - \frac{ne^2}{mc} \vec{A}(\vec{r})$$

diamagnetischer Anteil

$$\vec{j}_1 = \frac{-et}{2m} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \sigma} (2\vec{k} + \vec{q}) c_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma}^+ c_{\vec{k}, \sigma}$$

Wir wollen $\langle \vec{j} \rangle$ in linearer Ordnung in \vec{A} berechnen.

Für $\langle \vec{j}_2 \rangle$ haben wir schon bekommen (\leftrightarrow London-Gleichung mit $n_s \rightarrow n$). Um $\langle \vec{j}_1 \rangle = \langle \Phi | \vec{j}_1 | \Phi \rangle$ bis zu linearer Ordnung in \vec{A} zu berechnen, brauchen wir die Korrekte linearer Ordnung in \vec{A} zu H zu berücksichtigen.
 (und damit zu Φ)

$$H_1 = H_{\text{kin}} - H_{\text{kin}}, \vec{A} = 0 \quad \left| \begin{array}{c} \text{lin.} \\ \text{Ordnung} \\ \text{in } \vec{A} \end{array} \right. = -\frac{1}{c} \int d\vec{r} \vec{j}_1(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})$$

$$= \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} (2\vec{k} + \vec{q}) \vec{A}_{\vec{q}} C_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma}^+ C_{\vec{k}, \sigma}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_q e^{i\vec{q}\vec{r}}, q \rightarrow 0$$

$$\frac{e\hbar}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} \vec{A}_q$$

$$C_{k\sigma} = u_k b_{k\sigma} + v_k b_{-k, -\sigma}^+$$

$$u_k^2 + v_k^2 = 1$$

$$\text{Diese Korrektur zu } H_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}\sigma} E_{\vec{k}} b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma}$$

verschiebt die Energien von Bogoliubov-Quasiteilchen:

$$E_{\vec{k}} \rightarrow E_{\vec{k}} + \delta E_{\vec{k}\sigma}; \quad \delta E_{\vec{k}\sigma} = \frac{e\hbar}{mc} \vec{E} \vec{A}_q$$

$$\Rightarrow \langle \vec{j}_{1q} \rangle \Big|_{q \rightarrow 0} = -\frac{e\hbar}{m} \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \langle b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} \rangle =$$

$$= -\frac{e\hbar}{m} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{k} f(E_{\vec{k}} + \delta E_{\vec{k}\sigma}) = -\frac{e\hbar}{m} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{k} \cdot \delta E_{\vec{k}\sigma} \frac{\partial f}{\partial E_{\vec{k}}} =$$

$$= -2 \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c} \sum_{\vec{k}} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}_q) \frac{\partial f}{\partial E_{\vec{k}}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c} k_F^2 \nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} (-\frac{\partial f}{\partial E}) \vec{A}_q$$

$$= \frac{1}{3\pi^2} \frac{e^2}{mc} k_F^3 \int_{-\infty}^{\infty} (-\frac{\partial f}{\partial E}) \vec{A}_q = \frac{n e^2}{mc} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (-\frac{\partial f}{\partial E}) \vec{A}_q$$

$$\text{Kombinieren mit } \langle \vec{j}_{2q} \rangle = -\frac{n e^2}{mc} \vec{A}_q$$

$$\nu_0 = \frac{k_F m}{2\pi^2 \hbar^2}$$

$$n = k_F^3 / 3\pi^2$$

$$\Rightarrow \langle \vec{j}_q \rangle = \langle \vec{j}_{1q} \rangle + \langle \vec{j}_{2q} \rangle = -\frac{n e^2}{mc} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \right]$$

$$\text{London-Gleichung } \vec{J} = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{A}$$

$$\text{mit } n_s = n \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \right]$$

$$\underline{T > T_c} \rightarrow \Delta = 0, E = \xi$$

$$\Rightarrow \int d\xi \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) = \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) = 1$$

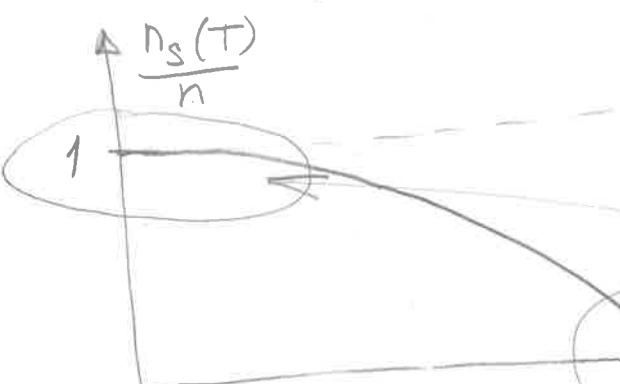
$\Rightarrow n_s = 0$, keine Supraleitung

$$\underline{T < T_c} \rightarrow E = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \geq \Delta, \xi = \sqrt{E^2 - \Delta^2}$$

$$\frac{n_s}{n} = 1 - 2 \int_{\Delta}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}$$

$$\underline{T=0} \rightarrow -\frac{\partial f}{\partial E} = \delta(E) \rightarrow \int_{\Delta}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \dots = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_s = n}$$



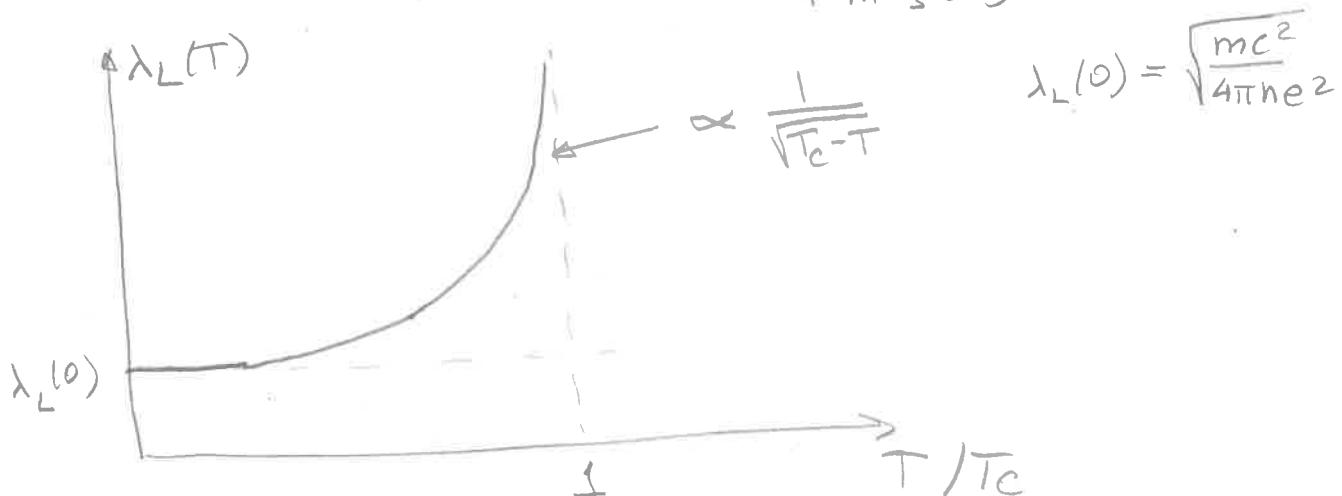
$$T \ll T_c \rightarrow \int_{\Delta}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \dots \propto e^{-\Delta/T}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n_s}{n} \propto e^{-\Delta/T}$$

$$\frac{n_s}{n} \approx 2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

siehe z.B. Abrikosov

$$\text{Eindringtiefe } \lambda_L(T) = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s(T) e^2}}$$



Eine alternative Herleitung der Formel für n_s

$n_s = n - n_n$. Um n_n zu berechnen, wir nehmen an, dass alle Quasiteilchen mit der Geschwindigkeit \vec{u} sich bewegen \Rightarrow Energien $E_p \rightarrow E_p - \vec{p} \cdot \vec{u}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Gesamtimpuls } \frac{\vec{P}}{V} &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \vec{p} f(E - \vec{p} \cdot \vec{u}) = \\ &= 2 \nu_0 \int d\xi \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{u}) \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) = \frac{2}{3} P_F^2 \nu_0 \int d\xi \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \vec{u} \\ \frac{\vec{P}}{V} &= n_n \cdot m \vec{u} \Rightarrow \boxed{n_n = \frac{2}{3} \frac{P_F^2}{m} \nu_0 \int d\xi \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right)} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis auf Seite 132

8.8. Phase des supraleitenden Kondensats

Flussquantisierung

Selbstkonsistenzgleichung ($T=0$; für $0 < T < T_c$)

$$\Delta = \frac{g}{2V} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}} ; \quad \boxed{\Delta = \frac{g}{V} \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle}$$

$$= g \langle \Psi_\downarrow(r) \Psi_\uparrow(r) \rangle$$

supraleitender Kondensat

= Ordnungsparameter

Wir haben die Lösung $\Delta \in \mathbb{R}$ gewählt.

Es gibt aber auch Lösungen mit denselben $|\Delta|$ und einer beliebigen Phase

$$\Delta = |\Delta| e^{i\phi}$$

Der entsprechende BCS - Grundzustand

$$|BCS(\phi)\rangle = \prod_k (u_k + e^{i\phi} v_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) |0\rangle$$

Es ist einfach zu überprüfen, dass

$$|BCS(N)\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |BCS(\phi)\rangle e^{-iN\phi/2}$$

lineare Kombination von Grundzustand
→ auch ein Grundzustand

einen Zustand mit dem festen N (Elektronenzahl)

Eichtransformation in der Quantenmechanik:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi = \vec{A}' , \quad \chi = \chi(\vec{r})$$

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp \left\{ -i e \frac{\hbar c}{4\pi} \chi \right\} = \Psi' \quad (\text{Ladung } -e)$$

Vergleichen mit

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$ -
Invariant
der
Transformation

$\Delta \rightarrow \Delta e^{i\phi} \sim$ Wellenfunktion des supraleitenden Kondensats.

$-e^* = -2e$ — Ladung des Cooperpaares

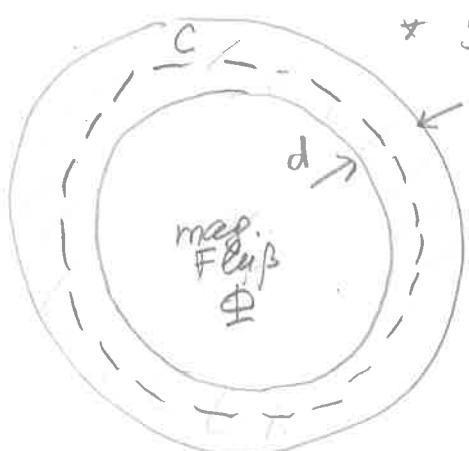
\Rightarrow in der London-Gl. für die eichinvariante Größe (strom)

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\hbar c}{e^*} \vec{\nabla} \phi = \vec{A} + \frac{\hbar c}{2e} \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{j}_s = - \frac{e^2 n_s}{mc} \left(\vec{A} + \frac{\hbar c}{2e} \vec{\nabla} \phi \right) \quad \text{Superstrom}$$

Flussquantisierung

* supraleitender Ring, $d \gg \lambda_L$



+ geschlossener Weg C weit im Inneren des Rings

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{j}_s = - \frac{e^2 n_s}{mc} \underbrace{\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A}}_{=0} +$$

//

magnetischer Fluss Φ

$$+ \frac{\hbar c}{2e} \cdot \underbrace{\int d\vec{l} \vec{\nabla} \phi}_{2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{2\pi\hbar c n}{2e} = n \Phi_0^{(s)}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\Phi_0^{(s)} = \frac{\hbar c}{2e}$ — supraleitender Flussquantum
($e \rightarrow 2e$)

8.9. Ginzburg-Landau-Theorie

Phänomenologische Theorie, 1950 [Zusammenhang mit der BCS-Theorie wird später diskutiert]

Ordnungsparameter $\psi(\vec{r}) \in \mathbb{C}$ $\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\phi(\vec{r})}$ - Wellenfunktion des Kondensats

n_s - Dichte von superleitenden Elektronen
 $n_s \rightarrow \frac{1}{2} n_s$: Elektronen \rightarrow Cooper-Paare

Wenn äußeres mag. Feld angelegt wird, ist ψ räumlich inhomogen: $\psi(\vec{r})$

$T = \frac{T - T_c}{T_c}$; die Theorie wird in der Nähe von T_c ($|T| \ll 1$) formuliert

$|T| \ll 1 \rightarrow$ Entwicklung der freien Energiedichte in Potenzen von ψ : $F_H = F - \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{4\pi} - \frac{Gibbs'sche freie Energie (freie Enthalpie)}{8\pi}$ \vec{H} - externes Feld, angegeben, nach ψ und \vec{B}

$$F_H(T, H) = F_H^{(n)}(T, 0) + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4$$

+ $\frac{1}{4m} \left[(-i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\vec{A})\psi \right]^2 + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{4\pi};$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

schreiben V nicht explizit; wird nicht wichtig

$$a = \alpha T$$

$$b > 0$$

Cooperpaar-Masse $2m$
Ladung $-2e$

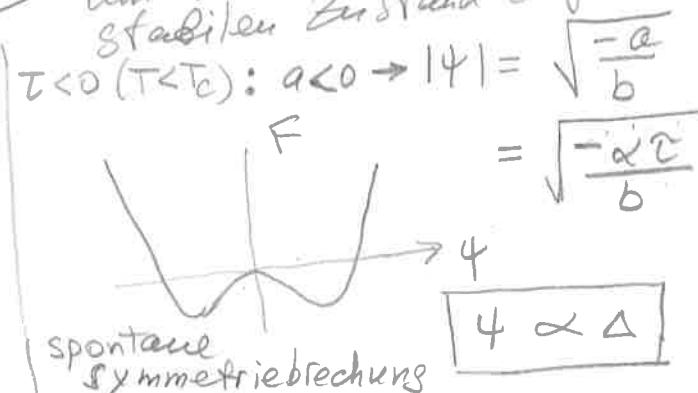
* $\vec{A} = 0$, ψ räumlich homogen:

$$\rightarrow F(T) = F^{(n)}(T) + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = 4[a + b|\psi|^2] \stackrel{!}{=} 0$$

minimieren die freie Energie, um den thermodynamisch stabilen Zustand zu finden

$T > 0$ ($T > T_c$): $a > 0 \rightarrow \psi = 0$



* inhomogene Situation: (i) $\frac{\delta F_H}{\delta \psi} = 0 \rightarrow$ Minimierung bezüglich ψ und \vec{A}

$$\frac{1}{4m} (-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{2e}{c} \vec{A})^2 \psi + a\psi + b|\psi|^2 \psi = 0$$

(ii) $\frac{\delta F_H}{\delta \vec{A}} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j};$ Nach dem Variieren bezüglich $\vec{A}:$
 $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$
 Wir benutzen $\vec{\nabla} \times \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j}_{ext} = 0$

$$\vec{j} = + \frac{i\epsilon\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi) - \frac{2e^2}{mc} |\psi|^2 \vec{A}$$

→ die London-Gleichung

$$\vec{j}_s = - \frac{e^2 n_s}{mc} (\vec{A} + \frac{\hbar c}{2e} \vec{\nabla} \phi)$$

heit $n_s = 2|\psi|^2; \quad \psi = |\psi| e^{i\phi}$

→ London-Eindringtiefe $\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}} = \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi |\psi|^2 e^2}}$

Kritisches Feld

\vec{H} homogen, $\vec{B} = 0$ im Inneren des Supraleiters

④ $F_H^{(n)}(H) \stackrel{\text{def}}{=} F_H^{(n)}(0) - \frac{H^2}{8\pi} \quad (\vec{B} = \vec{H}, \psi = 0) \quad B = 0$

⑤ $F_H^{(s)}(H) \stackrel{\text{def}}{=} F_H^{(n)}(0) + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \stackrel{\text{def}}{=} |\psi|^2 = -\frac{a}{b}$
 $= F_H^{(n)}(0) - \frac{a^2}{2b}$

$$\Rightarrow H_c^2 = 4\pi \frac{a^2}{b}$$

Vergleichen mit der mikroskopischen BCS-Theorie

GL: $n_s = 2|\psi|^2 = \frac{-2a}{b} = \frac{-2\alpha\tau}{b}$

$H_c^2 = 4\pi \frac{a^2}{b} = 4\pi \frac{\alpha^2}{b} \tau^2$

BCS, $\tau \equiv \frac{T-T_c}{T_c} < 0, \tau \ll 1;$

$n_s = -2\alpha\tau$

$H_c^2 = \frac{16\pi P_F m}{7g(3)\hbar^3} \tau^2 (k_B T_c)^2$

- * GL-Theorie liefert die richtige parametrische Abhängigkeit $n_s, T_c \propto |\zeta|$
 * man kann beide phänomenologische Koeffizienten α, b durch mikroskopische Parameter ausdrücken

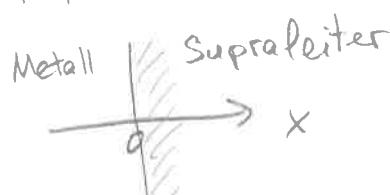
$$\alpha = \frac{12\pi^2}{7g(3)} m \left(\frac{k_B T_c}{PF} \right)^2; \quad b = \frac{\alpha}{n_e}$$

Kohärenzlänge

$\vec{A} = 0$, räumlich variierendes $\psi(\vec{r})$:

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \vec{\nabla}^2 \psi + a\psi + b|\psi|^2\psi = 0$$

$$\psi \in \mathbb{R}, \quad \psi(\vec{r}) = \psi(x)$$



$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + a\psi + b\psi^3 = 0$$

$$\psi(x=0) = 0 \rightarrow \text{Lösung } \psi(x) = \sqrt{-\frac{a}{b}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi},$$

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{-4ma}} = \frac{\hbar}{\sqrt{4m\alpha|\zeta|}}$$

Kohärenzlänge



Zusammenhang mit der BCS Lücke $\Delta(T)$:

$$\Delta = g \langle \Psi_{\downarrow}^{(r)} \Psi_{\uparrow}^{(r)} \rangle; \quad \Delta(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7g(3)} \right)^{1/2} k_B T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

$$\rightarrow |\Delta|^2 = \frac{8\pi^2}{7g(3)} k_B^2 T_c^2 |\zeta| \quad (\zeta < 0)$$

Vergleichen mit $|\psi|^2 = \frac{-a}{b} = n_e |\zeta|$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(r) = \left(\frac{7g(3)}{8\pi^2} \right)^{1/2} n_e^{1/2} \frac{\Delta(r)}{k_B T_c}}$$

$$\hbar \xi^{-1} = \sqrt{4m\alpha|\tilde{\epsilon}|} = \sqrt{\frac{48\pi^2}{7\zeta(3)}} \frac{mk_B T_c}{P_F} |\tilde{\epsilon}|^{1/2}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}} k_B T_c |\tilde{\epsilon}|^{1/2}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

$$\xi \sim \frac{\hbar}{\Delta/N_F}$$

Unschärferelation
Δx Δp

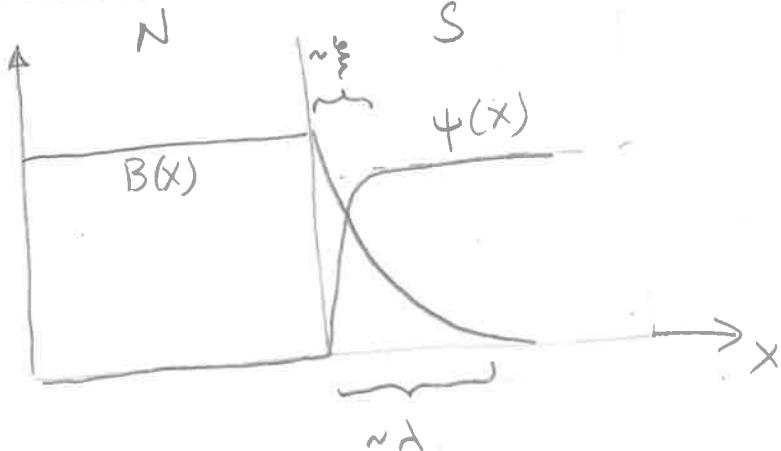
Zwei charakteristische Längenskalen: ξ und λ_L
 → dimensionsloses Verhältnis

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda_L}{\xi} = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi e^2} b} \\ &= \frac{mc}{e} \sqrt{\frac{6\pi}{7\zeta(3)} \frac{m}{n_e} \frac{k_B T_c}{P_F} b} \\ &= \frac{mc}{e} \sqrt{\frac{18\pi^3}{7\zeta(3)} \frac{\hbar^3 m}{P_F^3} \frac{k_B T_c}{P_F}} \\ &= \sqrt{\frac{18}{7\zeta(3)}} \frac{c}{e} \left(\frac{\pi\hbar}{V_F}\right)^{3/2} \frac{k_B T_c}{P_F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi|1/\epsilon|^2} b} = \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi e^2 \alpha |\tilde{\epsilon}|} b} \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{4m\alpha|\tilde{\epsilon}|}} \\ \Rightarrow \frac{\lambda_L}{\xi} &\text{ I-unabhängig!} \\ n_e &= \frac{P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \end{aligned}$$

α - Ginzburg-Landau - Parameter

Oberflächenenergie an der NS - Treufläche



grobe Abschätzung
 $\alpha \sim \frac{c}{V_F} \frac{k_B T_c}{E_F} \sim \frac{\alpha^{-1}}{\lambda} \frac{k_B T_c}{E_F}$

für typische Werte $\alpha \ll 1$
 aber: Unordnung reduziert ξ und vergrößert λ
 → man kann auch $\alpha > 1$ haben

- * in der Schicht $\xi \gg$ noch keinen supraleitenden
Ordnungsparameter

→ Erhöhung der freien Energie F_H (pro Flächen-
einheit)

$$\delta F_H \sim \xi \frac{a^2}{2b} = \xi \frac{H_c^2}{8\pi}$$

- * in der Schicht $\xi \ll \lambda$ Magnetfeld B $\sim H$

→ Absenkung der freien Energie

$$\sim \lambda \frac{H^2}{8\pi}$$

Insgesamt, Änderung der freien Energie
pro Flächeneinheit durch die Ausbildung
einer NS - Oberfläche / Trennfläche:

$$\delta F_H \sim \frac{1}{8\pi} (\xi H_c^2 - \lambda H^2)$$

Zwei Grenzfälle:

- * $\xi \gg \lambda \Leftrightarrow \alpha \ll 1$ Typ-I Supraleiter
(Pippard)
Es wird sich so wenig wie möglich Oberfläche bilden
 $H < H_c$ - Supraleitung, kein Eindringen des Magnetfeldes
 $H > H_c$ - Normalphase
- * $\xi \ll \lambda \Leftrightarrow \alpha \gg 1$ Typ-II Supraleiter
(London)
Dann kann es bei endlichem H energetisch
günstiger sein, möglichst viel Oberfläche
zu bilden.

Genaue Betrachtung:

$$\alpha < \sqrt{2} - \text{Typ-I} \quad \alpha > \sqrt{2} - \text{Typ-II}$$

Für Typ-II Supraleiter gibt es zwei krit. Felder

$$H_{c1} \sim \frac{H_c}{\alpha} \text{ bzw } H_{c2} \sim \alpha H_c \quad (H_{c2} > H_{c1})$$

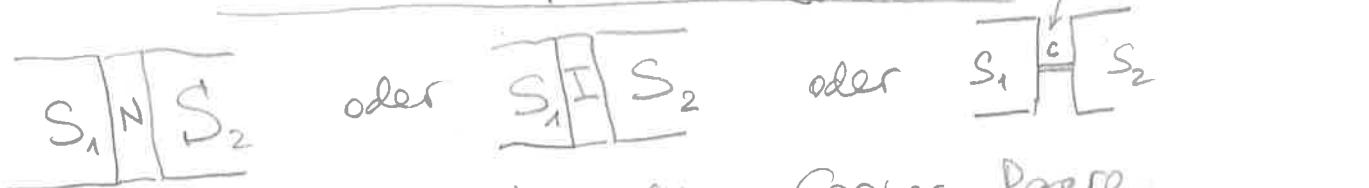
(asympt. Verhalten für $\alpha \gg 1$)

Für $H_{c1} < H < H_{c2}$ "Shubnikov-Phase":
normalleitende Bereiche im Form von dünnen
Schläuchen - Abrikosov-Flusswirbeln, die in Form
eines Dreiecksgitters angeordnet sind
("Abrikosov-Gitter")



Jeder Schlauch (Wirbel) trägt ein Flussquant
des Magnetfeldes

8.10. Josephson-Effekte



Tunnelkontakt für Cooper-Paare,

$$\psi_j = |\psi_j| e^{i\phi_j} \quad j=1,2 \quad |\psi_j| = \sqrt{\frac{n_{gj}}{2}}$$

Kondensat-Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = E_1 \psi_1 + K \psi_2$$

$K \in \mathbb{R}$
(kein Magnetfeld)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = E_2 \psi_2 + K \psi_1$$

$$I_{1 \rightarrow 2} = 2e \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1|^2 = 2e \left[\psi_1^* \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi_1^* \right) \psi_1 \right]$$

$$\text{Tunnel-Ström} = \frac{2e}{i\hbar} \left[\psi_1^* (E_1 \psi_1 + K \psi_2) - \psi_1 (E_1 \psi_1^* + K \psi_2^*) \right]$$

$$= \frac{2eK}{i\hbar} (\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) = \frac{2eK}{i\hbar} |\psi_1| |\psi_2| (e^{i(\phi_2 - \phi_1)} e^{i(\phi_1 - \phi_2)})$$

$$= \underbrace{4eK|\psi_1||\psi_2|}_{I_c} \sin(\phi_2 - \phi_1) = \underline{I_c \sin(\phi_2 - \phi_1)}$$

Josephson-Gleichstrom
↑ maximaler Strom
= krit. Strom des Kontakts

Widerstand des Kontakts im Normalzustand

$$R \propto K^{-1} \Rightarrow I_c \propto R^{-1}$$

Mikroskopische Berechnung: BCS-Theorie +

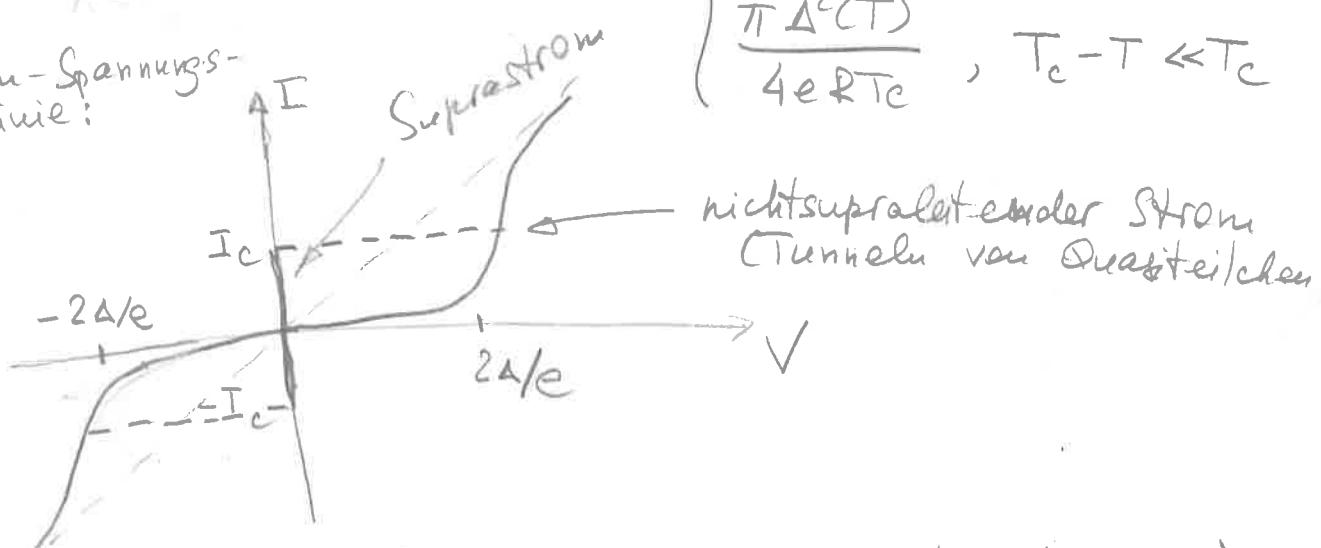
Tunnel-Hamilton-Operator

$$H_t = \sum_{p, q, \sigma} \left(T_{p, q} C_{p, \sigma}^{(1)} C_{q, \sigma}^{(2)} + h.c. \right)$$

→ siehe Abrikosov; Ergebnis für $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$:

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR} \tanh \frac{\Delta(T)}{2T} = \begin{cases} \frac{\pi \Delta(0)}{2eR}, & T=0 \\ \frac{\pi \Delta^2(T)}{4eR T_c}, & T_c - T \ll T_c \end{cases}$$

Strom-Spannungs-kennlinie:



Alternative Herleitung (aus GL-Gleichungen):

S.138: GL-Gl. für $\psi = \psi(x)$

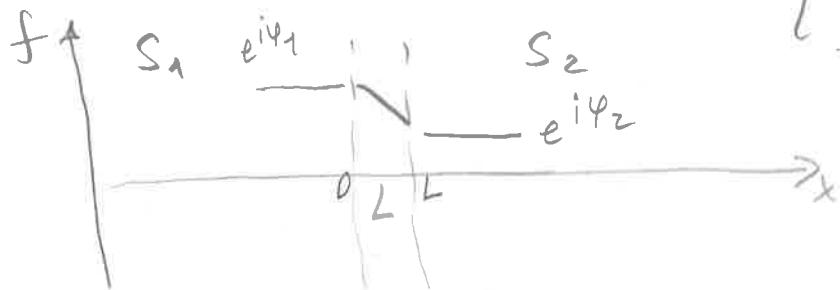
$$-\frac{\hbar^2}{4m} \partial_x^2 \psi + a\psi + b|\psi|^2 \psi = 0$$

Wir definieren die dimensionlose Funktion $\frac{\psi(x)}{|\psi_\infty|} = f(x)$
(wir nehmen an $\Delta_1 = \Delta_2, |\psi - \psi_0| = |\psi_+ - \psi_0|$)



$$-\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f + H^2 f = 0$$

Randbedingungen: $f(x) = \begin{cases} e^{i\varphi_1}, & x \rightarrow S_1 \quad (x=0) \\ e^{i\varphi_2}, & x \rightarrow S_2 \quad (x=L) \end{cases}$



$L \ll \xi \Rightarrow$ in der führenden Ordnung kann man nur den ersten Term behalten

$$-\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \Rightarrow f(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) e^{i\varphi_1} + \frac{x}{L} e^{i\varphi_2} \quad (0 < x < L)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow j_x &= \frac{i\epsilon\hbar}{2m} \left[4^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})^* 4 \right]_x \\ &= \frac{i\epsilon\hbar}{2m} |\Phi_{\infty}|^2 \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{L} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - \frac{1}{L} \frac{x}{L} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right. \\ &\quad \left. - c.c. \right] \\ &= \frac{i\epsilon\hbar}{2m} |\Phi_{\infty}|^2 \frac{1}{L} \left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{e\hbar}{mL} |\Phi_{\infty}|^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I_x = S j_x = \underbrace{I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}_{\text{Querschnittsfläche}},$$

$$I_c = S \frac{e\hbar}{mL} |\Phi_{\infty}|^2$$

Bemerkung: das gleiche Verhalten
 $I_c \propto |\Phi_{\infty}|^2 \propto \Delta^2(T) \propto T_c - T$
wie für einen Tunnelkontakt

Wir haben oben angenommen, daß es kein Magnetfeld gibt ($\vec{A} = 0$). In allgemeiner Situation

$$I = I_c \sin \left(\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{2e}{\hbar c} \int \limits_1^2 d\vec{s} \cdot \vec{A} \right)$$

eichinvariante
Phasendifferenz

Das folgt aus dem Ausdruck für die "lange" (eichinvariante) Ableitung.

$$\frac{\hbar c}{2e} \vec{\nabla} \phi + \vec{A} \quad \text{im GL-Funktional}$$

SQUID

Φ

$I = I_1 + I_2$

$= I_{c1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0^{(S)}})$

$+ I_{c2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0^{(S)}})$

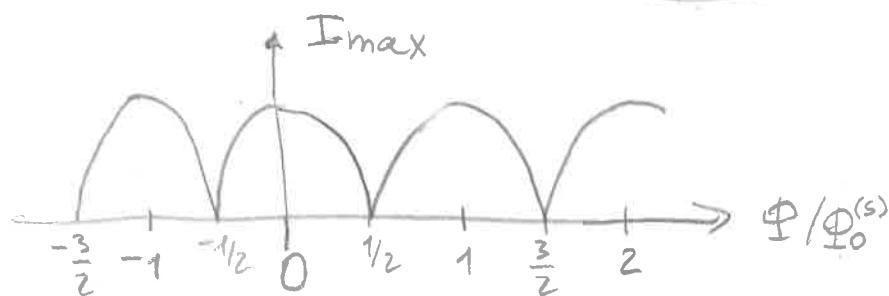
$I_{c1} = I_{c2} = I_c$

$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{s}$

$= \int_C_1 \vec{A} d\vec{s} - \int_C_2 \vec{A} d\vec{s}$

$$\rightarrow I = I_{\max} \sin(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$I_{\max} = 2I_c \left| \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0^{(S)}} \right|$$



→ Hochpräzisionsmessungen von Magnetfeldern

Wechselstrom - (ac-) Josephson - Effekt

-145-

Spannung V am Josephson - Kontakt

- zeitabhängige Phasendifferenz
- ac Strom

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = E_1 \psi_1 + K \psi_2$$

$$\psi_1 = |\psi_1| e^{i\varphi_1}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = E_2 \psi_2 + K \psi_1$$

$$\psi_2 = |\psi_2| e^{i\varphi_2}$$

Vernachlässigen K :

$$\begin{aligned} -i\hbar \dot{\varphi}_1 &= E_1 \\ -i\hbar \dot{\varphi}_2 &= E_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{i}{\hbar} (E_2 - E_1) =$$

$$= \frac{2e}{\hbar} \underbrace{[\psi_{\text{el}}^{(2)} - \psi_{\text{el}}^{(1)}]}_{V - \text{Spannung}} = \frac{2e}{\hbar} V$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2e}{\hbar} V t + \text{const}}$$

$$\boxed{I = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = I_c \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V t + \theta_0\right)}$$

ac Josephson - Effekt

Spannung V → Wechselstrom mit $\omega = \frac{2e}{\hbar} V$
Sehr hohe Genauigkeit, metrologische Anwendungen.

Eichinvariante Formulierung / Herleitung

$$I = I_c \sin \theta$$

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{2e}{\hbar c} \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} \quad - \text{eichinvariante Phasendifferenz}$$

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 + \underbrace{\frac{2e}{\hbar c}}_{\parallel} \int_1^2 \dot{\vec{A}} d\vec{l}$$

$$\frac{2e}{\hbar} [\varphi_{el}^{(2)} - \varphi_{el}^{(1)}] = \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 \vec{\nabla} \varphi_{el} d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi_{el} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 (\vec{\nabla} \varphi_{el} + \frac{1}{c} \vec{A}) d\vec{l} = -\frac{2e}{\hbar} \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{2e}{\hbar} V}$$

$$I = I_c \sin \left(\frac{2e}{\hbar} V t + \theta_0 \right)$$

Josephson-Kontakte → makroskopische Quantenkohärenz
supraleitende Qubits

9. Elektronischer Transport in Festkörpern

9.1. Boltzmann-Gleichung

Hinreichend langsam variierende äußere Felder

→ quasiklassische Beschreibung.

Verteilungsfunktion: $f(\vec{k}, \vec{r}, t)$ - mittlere Zahl von Elektronen im Zustand \vec{k} am Punkt \vec{r} zur Zeit t .

Äquivalent: $\frac{1}{(2\pi)^3} f(\vec{E}, \vec{r}, t) \Delta^3 k \Delta^3 r$ - Anzahl von Elektronen im Phasenvolumen

[Reduzierte Beschreibung: 1-Teilchen-Verteilungsfunktion] $\Delta^3 k \cdot \Delta^3 r$

Die Beschreibung gilt sowohl für freie Elektronen als auch für Elektr. in einem period. Potential, d.h. mit beliebigem Spektrum $E_j(\vec{k})$. Dann hat die Verteilungsf noch den Bandindex: $f_j(\vec{k}, \vec{r}, t)$. Wir werden annehmen, dass nur ein Band relevant (teilweise gefüllt) ist und den Index nicht beschreiben.

$$\text{Elektronendichte} \quad n(\vec{r}, t) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(\vec{E}, \vec{r}, t);$$

$$\text{stromdichte} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = -2e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v(\vec{E}) f(\vec{k}, \vec{r}, t);$$

$$v(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{E}} - \text{Geschwindigkeit}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v(\vec{E}); \quad \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \vec{j}(\vec{E}) \times \vec{B}$$

Falls Elektronen laut dieser Gleichungen sich bewegen würden, hätten wir

$$f(\vec{E}(t), \vec{r}(t), t) = f(\vec{k}(0), \vec{r}(0), 0),$$

aber, äquivalent, $\frac{df}{dt} = 0$ (Liouvillscher Satz)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}(\vec{k}) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} - \frac{e}{\hbar} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}(\vec{k}) \times \vec{B} \right] \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = 0$$

Es gibt aber noch ^{quantummechanische} Stopprozesse (Störstellenstreuung, E-Phonon-Streuung, E-E-Streuung)

$$\rightarrow \text{Stopterm} \quad (\text{Stopintegral}) \quad \frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{\text{coll}} \equiv I[f]$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{v}(\vec{E}) \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{E}} - \frac{e}{\hbar} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}(\vec{E}) \times \vec{B} \right] \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{E}} = I[\vec{f}]$$

Boltzmann-Gleichung

Störintegral für (elastische) Streuung an Störstellen

$W_{\vec{k}, \vec{k}'} =$ Wahrscheinlichkeit der Elektronenstreuung
 $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ pro Zeiteinheit

Für schwache Störstellen: die Goldene Regel gibt

$$W_{\vec{k}, \vec{k}'} = \frac{2\pi}{h} n_i \delta(\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k}')) |\langle \vec{k}|U|\vec{k}' \rangle|^2 =$$

↑ Störstellen dichte

↑ Potential einer
Störstelle

Im Allgemeinen $|\langle \vec{E} | U | \vec{k}' \rangle|^2 \rightarrow$ exakte "Streumatrix an der Störstelle"

$$= \delta(\epsilon(\vec{E}) - \epsilon(\vec{E}')) \tilde{\omega}_{\vec{E}\vec{E}'}$$

$$I[f]_{(k)} = - \int \frac{dk'}{(2\pi)^3} \left\{ W_{kk'} f(k) [1-f(k')] - W_{k'k} f(k') [1-f(k)] \right\}$$

\uparrow \uparrow
 I_{out} I_{in}

$W_{kk'} = W_{k'k}$ "detailed balance" (detailliertes Gleichgewicht)

$$\rightarrow I[f](k) = - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W_{kk'} (f(k) - f(k'))$$

9.2. Leitfähigkeit

zunächst Magnetfeld $\vec{B} = 0$, el. Feld homogen, schwach
 (\rightarrow lineare Antwort)

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_w e^{-i\omega t}$$

B-GL:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \cancel{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}} - e \vec{E}(t) \frac{1}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W_{kk'} (f(k) - f(k'))$$

$$\vec{E} = 0 \rightarrow f = f_0(\epsilon_k) \quad \text{Fermi-Dirac} \quad \epsilon(k) = \epsilon_k$$

$$\vec{E} \neq 0 \rightarrow f = f_0 + \delta f \quad \text{linear in } E \quad (\text{lineare Antwort})$$

$$\delta f(\vec{k}, t) = \delta f_w(\vec{k}) e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \delta f}{\partial t} = (-i\omega) \delta f_w e^{-i\omega t}$$

$$\frac{1}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} \approx \frac{1}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{k}} = \vec{E} \vec{v}_k \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k}$$

$$I[f](k) = - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W_{kk'} (f(k) - f(k')) = I[\delta f](k)$$

$$\simeq -\frac{1}{\tau_k} \delta f(\vec{k}) \quad \begin{array}{l} \text{Relaxationszeitnäherung} \\ (\text{Berechnung von } \tau_k - \text{siehe unten}) \end{array}$$

$$\rightarrow -i\omega \delta f_w(\vec{k}) - e \vec{E}_w \vec{v}_k \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} = -\frac{1}{\tau_E} \delta f_w(\vec{k})$$

$$\rightarrow \delta f_w(\vec{k}) = \frac{\tau_E}{1 - i\omega \tau_E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \cdot e \vec{v}_k \cdot \vec{E}_w$$

Elektrische Stromdichte:

$$\vec{j}_\omega = -2e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v_E f(\vec{k}) = 2e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\vec{I}_E}{1-i\omega\tau_k} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \right) \cdot (\vec{v}_k \cdot \vec{E}_\omega) \vec{v}_E$$

Leitfähigkeitsteiner:

$$\vec{j}_{\omega,\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}^{(\omega)} \vec{E}_\omega$$

$$\rightarrow \sigma_{\alpha\beta} = 2e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v_{E,\alpha} v_{E,\beta} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \right) \frac{\vec{I}_k}{1-i\omega\tau_k}$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \simeq \delta(\epsilon - \mu) - \underbrace{\frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \delta''(\epsilon - \mu)}_{\text{Sommerfeld-Entwicklung}} + \dots$$

vernachlässigen ($T \ll \mu$)

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \right) \rightarrow \text{Integral über die Fermi-Fläche}$$

Zur Vereinfachung: Annahme isotroper Dispersion
 $\epsilon(E) = \epsilon(|\vec{k}|)$

$$\rightarrow \sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^2 \Im \zeta}{1-i\omega\zeta} \int d\Omega v_\alpha v_\beta = \frac{2e^2 \Im \zeta}{1-i\omega\zeta} \frac{V_F^2}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

Drude-Formel

$$\Im = \Im(\mu); \quad \zeta \equiv \zeta_{k_F}$$

Berechnung der Relaxationszeit

(isotrope Dispersion) $\frac{\vec{I}}{1-i\omega\zeta} e \vec{v}_k \cdot \vec{E}_\omega = - \vec{n}_k \cdot \vec{g}(\epsilon_k)$

$$\delta f_\omega(\vec{k}) = - \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \right) \frac{\vec{I}}{1-i\omega\zeta}$$

$\vec{L} \vec{E}/|\vec{k}|$

$\zeta \approx \delta(\epsilon_k - \mu) \Rightarrow |\vec{k}| = k_F$

$$I[\delta_f](k) = - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W_{kk'} (\vec{f}(\vec{k}) - \vec{f}(\vec{k}'))$$

$$= + \vec{g}(\epsilon_k) \Im \int d\Omega_{k'} W_{kk'} (\vec{n}_k - \vec{n}_{k'})$$

$$W_{kk'} = w(\theta)$$

Winkel; $\cos \theta = \vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k'}$

$$\Im = \Im(\mu)$$

$$w(\theta) = w_{k_F}(\theta)$$

$$\underbrace{\int d\Omega_{k'}, \omega_{E'E} (\vec{n}_{k'} - \vec{n}_{k'})}_{\Rightarrow \text{ aus Symmetriegründen}} \propto \vec{n}_{k'} \int d\Omega_{k'}, \omega_{E'E} (1 - \vec{n}_E \cdot \vec{n}_{E'}) \\
 = \vec{n}_{k'} \int d\Omega \omega(\theta) (1 - \cos \theta) \\
 = \vec{n}_{k'} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \omega(\theta) (1 - \cos \theta) \\
 \Rightarrow I[\delta f](k) = \vec{g}(E_k) \cdot \vec{n}_k \cdot \sqrt{\int d\Omega \omega(\theta) (1 - \cos \theta)} \\
 = -\frac{1}{T} \delta f(k)$$

mit

$$\boxed{\frac{1}{T} = \sqrt{\int d\Omega \omega(\theta) (1 - \cos \theta)}}$$

$$\omega(\theta) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i |U(\theta)|^2 ; \quad U(\theta) = \langle \vec{k} | U | \vec{k}' \rangle ; \quad \theta = \vec{E}, \vec{E}'$$

Die oben berechnete τ ist Transportrelaxationszeit; oft τ_{tr} bezeichnet.

Im Allgemeinen unterscheidet sich von "Quantumrelaxationszeit"

$$T_q : \quad \frac{1}{T_q} = \sqrt{\int d\Omega \omega(\theta)} \quad ("Lebensdauer" \text{ des Zustands mit gegebenem } \vec{E})$$

- Grenzfälle:
- * isotrope Streuung: $\omega(\theta) = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{T_q} = \frac{1}{T_{tr}}$
 - * Kleinwinkelstreuung: typische $\theta \ll 1$ $\Rightarrow \frac{1}{T_{tr}} \ll \frac{1}{T_q}$

9.3. Thermo-elektrische Transporteigenschaften

Wir möchten auch $\vec{\sigma}_\mu$ und $\vec{\sigma}_T$ anlegen.

Dafür betrachten wir eine Verteilungsfunktion mit $T(\vec{r})$ und $\mu(\vec{r})$:

$$f_0^l(\vec{k}) = \frac{1}{\exp\left[\frac{\epsilon_k - \mu(F)}{k_B T(F)}\right] + 1} \quad \text{"lokales Gleichgewicht"}$$

$$I[f_0^l] = 0 \quad (\text{wie für globales Gleichgewicht})$$

$$f = f_0^l + \delta f \rightarrow \text{in Boltzmann-Gleichung}$$

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} - \frac{e\vec{E}}{\hbar} \vec{\nabla}_k (f_0 + \delta f) + \vec{\nabla}_k \vec{\nabla}_r (f_0 + \delta f) = I[\delta f]$$

$$\text{Benutzen } \vec{\nabla}_r f_0 = \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k}\right) \left(\vec{\nabla}_r \mu + \frac{\epsilon_k - \mu}{T} \vec{\nabla}_r T\right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k}\right) \vec{\nabla}_k & \left[(\vec{\nabla}_r \mu + e\vec{E}) + \frac{\epsilon_k - \mu}{T} \vec{\nabla}_r T \right] = \\ & = I[\delta f] - \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \underbrace{\frac{e\vec{E}}{\hbar} \vec{\nabla}_k \delta f}_{\substack{\uparrow \\ - \frac{\delta f}{\Sigma}}} - \vec{\nabla}_k \vec{\nabla}_r \delta f \\ & \qquad \qquad \qquad \text{vernachlässigen} \\ & \qquad \qquad \qquad [\text{tragen nicht in linearer} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{Ordnung bei:}] \\ & \qquad \qquad \qquad [\vec{E}, \delta f, \vec{\nabla}_r - \text{klein}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta f(k) = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_k} \vec{\nabla}_k \frac{T_{tr}}{1-i\omega T_{tr}} \left[(\vec{\nabla}_r \mu + e\vec{E}) + \frac{\epsilon_k - \mu}{T} \vec{\nabla}_r T \right]}$$

$$\vec{E}_{el, ch} = -\vec{\nabla} \varphi_{el, ch}; \quad \text{"elektrochemisches Feld"}$$

$$\varphi_{el, ch} = \varphi_{el} - \frac{1}{e} \mu \quad - \text{elektrochemisches Potential}$$

$$\text{Elektrische Stromdichte} \quad \vec{j}(F, t) = -2e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{\nabla}_k \delta f(\vec{k}, \vec{r}, t)$$

$$\text{Wärmestromdichte} \quad \vec{j}_Q(F, t) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\epsilon_k - \mu) \vec{\nabla}_k \delta f(\vec{k}, \vec{r}, t)$$

(folgt aus $dQ = dU - \mu dN$)

$$\begin{pmatrix} \vec{j} \\ \vec{j}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_{\text{el.ch}} \\ -\frac{\vec{v}_T}{T} \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{v}_k \delta f(\vec{E}) = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_0}{\partial E_k} \left[\vec{v}_k \cdot (e \vec{E}_{\text{el.ch}} + \frac{eE_T}{T} \vec{v}_T) \right] \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{11,\alpha\beta} = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E_k} \right) v_{k,\alpha} v_{k,\beta} T}$$

wir setzen $w=0$
sonst $T \rightarrow \frac{T}{1-iwT}$

$$K_{12,\alpha\beta} = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E_k} \right) (\epsilon_k - \mu) v_{k,\alpha} v_{k,\beta} T$$

Analog für \vec{j}_Q ($-e \rightarrow (\epsilon_k - \mu)$)

$$\Rightarrow \boxed{K_{21,\alpha\beta} = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E_k} \right) (\epsilon_k - \mu) v_{k,\alpha} v_{k,\beta} T}$$

$$K_{22,\alpha\beta} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E_k} \right) (\epsilon_k - \mu)^2 v_{k,\alpha} v_{k,\beta} T$$

K_{11} - elektrische Leitfähigkeit, siehe oben

$$K_{22}: \text{ benutzen } -\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx \delta(\epsilon - \mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \delta''(\epsilon - \mu)$$

$$\rightarrow K_{22,\alpha\beta} \approx 2 \sqrt{\frac{V_F}{3}} \delta_{\alpha\beta} T \underbrace{\int d\epsilon [\delta(\epsilon - \mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \delta''(\epsilon - \mu)] (\epsilon - \mu)^2}_{\hookrightarrow \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2}$$

$$= \frac{2\pi^2}{g} (k_B T)^2 \sqrt{V_F^2 T} \delta_{\alpha\beta}$$

Man definiert termische Leitfähigkeit:

$$\vec{j}_Q = -\alpha \vec{v}_T \quad \text{bei } \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{T} \left(K_{22} - \frac{K_{12} K_{21}}{K_{11}} \right) \approx \frac{K_{22}}{T}$$

↑ Korrekter $\sim \frac{k_B T}{\mu}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi^2}{g} k_B^2 T \sqrt{V_F^2 T}$$

Vergleichen mit $\sigma = \frac{2}{3} e^2 \nu v_F^2 T$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{e^2} T}$$

Wiedemann - Franz -

Gesetz

(nicht allgemein gültig! Es ist wichtig,
dass die Streuung
elastisch ist!)

$K_{12} = K_{21}$ - Onsager - Symmetrie

$K_{12} \rightarrow$ Thermokraft : Temperaturgradient induziert
elektrisches Feld im offenen
Stromkreis ($\vec{j} = 0$)

9.4. Magnetotransport-eigenschaften

$\vec{B} \parallel z$, parabolische Dispersion $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (Fall offener
Bahnen wird später diskutiert)

B-Gl.: $f = f_0 + \delta f$, Linearisierung, $\omega = 0$:

$$-\frac{e}{\hbar c} (\vec{v}_k \times \vec{B}) \vec{\nabla}_k \delta f_k - e \vec{E} \cdot \vec{v}_k \frac{\partial f_0}{\partial E_k} = -\frac{1}{T} \delta f$$

hier f_0 trägt nicht bei,
weil $\frac{1}{\hbar} (\vec{v}_k \times \vec{B}) \vec{\nabla}_k f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial E_k} (\vec{v}_k \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_k = 0$

$$\text{Wir suchen } \delta f_k = \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) (-e) \vec{v} \vec{v}_k \cdot \vec{X}$$

\Rightarrow Gleichung für \vec{X} :

$$-w_c \vec{v} (\vec{v}_k \times \vec{B}) \cdot \vec{X} + \vec{v}_k \cdot \vec{X} = \vec{v}_k \cdot \vec{E}$$

$$\hat{b} = \vec{B} / |\vec{B}|$$

$$w_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\text{Wir suchen } \vec{X} = |\vec{E}| (\alpha \hat{e} + \beta \hat{b} + \gamma \hat{e} \times \hat{b})$$

Substitution, \Rightarrow Gleichungen für Koeffizienten vor

$$\vec{v}_k \cdot \vec{e}, \vec{v}_k \cdot \vec{b}, \vec{v}_k \cdot (\vec{e} \times \vec{b}) \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + w_c^2 \zeta^2}, \quad \beta = \frac{w_c^2 \zeta^2}{1 + w_c^2 \zeta^2} (\vec{e} \cdot \vec{b}), \quad \gamma = \frac{-w_c \zeta}{1 + w_c^2 \zeta^2}$$

$$\vec{X} = \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tilde{\tau}^2} \left(\vec{E} - \omega_c \tilde{\tau} \vec{E} \times \vec{b} + \omega_c^2 \tilde{\tau}^2 (\vec{E} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right)$$

Stromdichte $\vec{j} = \sigma_0 \vec{X}$; $\sigma_0 = \frac{2}{3} e^2 \tilde{\tau} v_F^2 \tilde{\tau}$
 $= \frac{n e^2 \tilde{\tau}}{m}$

$$\rightarrow \sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tilde{\tau}^2} \begin{pmatrix} 1 - \omega_c \tilde{\tau} & 0 & 0 \\ \omega_c \tilde{\tau} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tilde{\tau}^2 \end{pmatrix} \quad \vec{B} \parallel \hat{z} \quad (\Leftrightarrow \vec{b} = \hat{z})$$

Invertieren \rightarrow Widerstandstensor

$$\rho = \sigma^{-1} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tilde{\tau} & 0 \\ -\omega_c \tilde{\tau} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_0 = 1/\sigma_0$$

* $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\rho_{zz} = \rho_0$ wie bei $\vec{B} = 0$, weil die Bewegung in z -Richtung durch \vec{B} nicht beeinflusst ist.

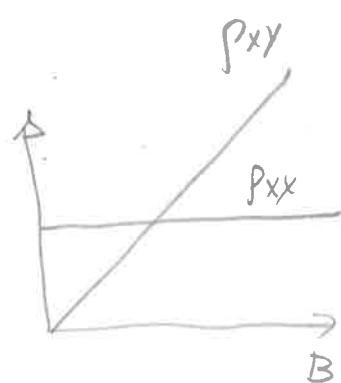
* Hall-Koeffizient:

$$R = \frac{\rho_{yx}}{B} = -\rho_0 \frac{\omega_c \tilde{\tau}}{B} = -\frac{m}{n e^2 \tilde{\tau}} \frac{e B \tilde{\tau}}{m c B} = \frac{-1}{n e c}$$

$\text{Sign}(R) = \text{sign}(\text{Ladung von Ladeungsträger})$

* Magnetwiderstand:

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_0 \quad - \text{B-unabhängig}$$

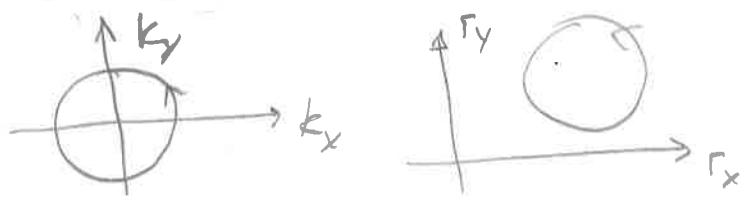


Das Verhalten für den Fall offener Bahnen unterscheidet sich aber qualitativ im Hinblick von hohen Magnetfeldern

Grenzverhalten für hohes Magnetfeld ($\omega_c t \gg 1$)

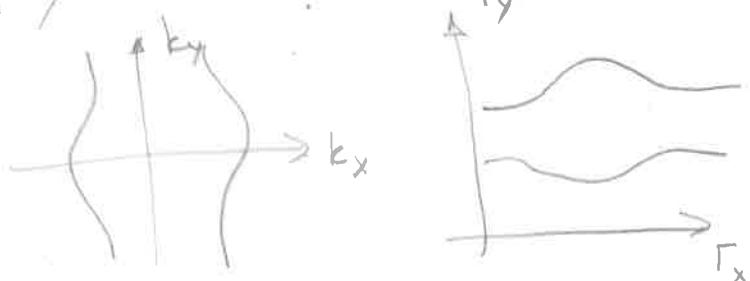
i) Geschlossene Bahnen:

$$\sigma_{ij} \approx \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{(\omega_c t)^2} - \frac{1}{\omega_c t} & 0 \\ \frac{1}{\omega_c t} & \frac{1}{(\omega_c t)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow p_{ij} = p_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_c t & 0 \\ -\omega_c t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Offene Bahnen:
(für gegebene Richtung von \vec{B})



→ Bewegung in r_x - Richtung \sim wie ohne Magnetfeld

$$\Rightarrow \sigma_{ij} \sim \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\omega_c t} & 0 \\ \frac{1}{\omega_c t} & \frac{1}{(\omega_c t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow p_{ij} \sim p_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\omega_c t}{2} & 0 \\ -\frac{\omega_c t}{2} & \frac{\omega_c^2 t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_{yy}$ stark erhöht, $p_{yy} \propto B^2$ für $\omega_c t \gg 1$

9.5. Temperaturabhängigkeit des Widerstands eines Metalls: Streuung von Elektronen an Elektronen und an Phononen

(sehr kurz: nur T-Abhängigkeit)

* E-E-Streuung

$$\frac{1}{\tau_{e-e}} \sim \frac{1}{\hbar} \frac{(k_B T)^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ee} \propto T^{-2}}$$

$\uparrow \approx E_F$

Kommentar: Umklapp-Prozesse wichtig, sonst Impuls-Erhaltung $\rightarrow \sigma = \infty$

* E-Phonon-Streuung

$$H_{el-ph} = \sum_{E, \vec{q}, \sigma} M(\vec{q}) C_{E+\vec{q}, \sigma}^+ C_{E, \sigma} [a_{\vec{q}} + a_{-\vec{q}}^+]$$

$$M(\vec{q}) = -i q \sqrt{\frac{\hbar}{2 N M w(q)}} \frac{4 \pi e^2 n}{k_F^2}$$

$$I[f](k) = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left\{ W_{kk'}^{\rightarrow} f(\vec{k}') [1-f(\vec{k})] - W_{kk'}^{\leftarrow} f(\vec{k}) [1-f(\vec{k}')] \right\}$$

(in) (out)

$$W_{kk'} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_q|^2 \left[n_q \delta(E_{k'} - E_k - \hbar \omega_q) + (n_q + 1) \cdot \delta(E_{k'} - E_k + \hbar \omega_q) \right]$$

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$$

$$n_q = \left(e^{\hbar \omega_q / k_B T} - 1 \right)^{-1}$$

Bose-Funktion

$$\begin{matrix} \downarrow k', E_{k'} \\ \downarrow k, E_q \\ \downarrow k', E_{k'} \\ \downarrow k, E_q \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow k', E_{k'} \\ \downarrow k, E_q \\ \downarrow k', E_{k'} \\ \downarrow k, E_q \end{matrix}$$

i) $k_B T \ll \hbar \omega_D$ charakt. Energien $\hbar \omega_q \sim k_B T$ (akust. Phononen)

charakt. Impulse von Phononen $\hbar q \sim \frac{k_B T}{c_s}$ Schallgeschwindigkeit

$$\int \frac{d^3 E'}{2\pi^3} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int q^2 dq \int \sin \theta_q d\theta_q$$

↑
Winkel \vec{q}, \vec{k}

$$\delta(E_{k'}, E_k - \hbar \omega_q) = \delta\left(\frac{\hbar^2 (\vec{k} + \vec{q})^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \hbar \omega_q\right)$$

$$= \delta\left(\frac{\hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{q}}{m} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \hbar \omega_q\right) = \delta\left(\frac{\hbar^2 k q}{m} \cos \theta_q + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \hbar \omega_q\right)$$

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \ll \frac{\hbar^2 k q}{m}, \text{ weil } k \approx k_F, q \ll k_F$$

$$\hbar \omega_q \ll \frac{\hbar^2 k q}{m}, \text{ weil } c_s \ll v_F$$

\Rightarrow Argument der $\delta(\dots)$ ist $= 0$ bei $\cos \theta_q \ll 1$

$$\Rightarrow \int \sin \theta_q d\theta_q \delta(\dots) \approx \frac{m}{\hbar^2 k q}$$

Damit die volle Streureate

$$\frac{1}{T_{\text{quantum}}} \propto \int dq q^2 |\mathbf{M}_q|^2 \frac{m}{\hbar^2 k q} \propto \int dq q^2 \propto T^3$$

\uparrow
 $\propto \frac{q^2}{\omega_q} \propto q$

Die Transportstreurate für die elektr. Leitfähigkeit hat aber zusätzlich den Faktor $(1 - \cos \theta)$,

$$\theta = \vec{k}, \vec{k}' ; \vec{E}' = \vec{k} + \vec{q}$$

$$k \approx k_F, q \approx \frac{k_B T}{c_s k_F} \ll k_F \Rightarrow \theta \ll 1$$

$$1 - \cos \theta \sim \theta^2 \sim \left(\frac{q}{k}\right)^2 \sim \left(\frac{k_B T}{\hbar c_s k_F}\right)^2 \propto T^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_{\text{tr}}} \propto T^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{e\text{-ph}} \propto T^{-5}, \quad k_B T \ll \hbar \omega_D}$$

Bloch'sches T^5 -Gesetz

ii) $k_B T \gg \hbar \omega_D$

charakteristische

Phononimpulse $\sim k_F$

Phononenenergien $\sim \hbar \omega_D$

Streuwinkel $\theta \sim 1$

T-Abhängigkeit kommt jetzt nur aus der Bose-Verteilung

$$n_q = (e^{\hbar \omega_q / k_B T} - 1)^{-1} \approx \frac{k_B T}{\hbar \omega_q} \propto T$$

$$\frac{1}{I_{\text{eff}}} \sim \frac{1}{I_{\text{quantum}}} \propto T$$

$$\sigma_{e-ph} \propto T^{-1}, \quad k_B T \gg \hbar \omega_D$$

$$P_{\text{total}} \approx P_{\text{imp}} + P_{e-e} + P_{e-ph}$$

Matthiesische
Regel

\uparrow	\uparrow	\uparrow	
const	T^2	$\left\{ \begin{array}{l} T^5 \\ \frac{1}{T} \end{array} \right.$	
			$k_B T \ll \hbar \omega_D$
			$k_B T \gg \hbar \omega_D$

