KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE
DER KONDENSIERTEN MATERIE

Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex

Blatt 1
Besprechung: 23.10.2018

Mathematische Vorbetrachtungen

1. Eigenschaften der Spur (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für Hilbertraum-Operatoren A, B, C gilt:
(i) $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$,
(ii) Sp(ABC) $= \text{Sp}(CAB) = Sp(BCA)$ und
(iii) $\text{Sp}(A)$ ist unabhängig von der Basis.

2. Stirling-Formel (6 Punkte)

Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad N \gg 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie hierzu den Zusammenhang mit der Gammafunktion

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty dx\, x^N\, e^{-x} \tag{2}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur zweiten Ordnung in der Variablen $x - N$, um ein Gaußsches Integral zu erhalten.

3. Legendre-Tansformation (7 Punkte)

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$. Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.
Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und

$V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendre-transformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$.

4. Integrabilität und vollständige Differentiale (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Gegeben sei eine Differentialform im $\mathbb{R}^2$, $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Zeigen Sie: Wenn ω ein vollständiges Differential ist, so gilt:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)_y \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie nun die umgekehrte Richtung: gilt Gleichung (3), so ist ω ein vollständiges Differential.

(c) **(15 Bonuspunkte)** Im Fließbach wird zum vollständigen Differential erläutert: „Die Differenzierbarkeit einer Funktion zweier Variabler ist gleichbedeutend mit jeweils einer der folgenden Aussagen: [...] (ii) Die partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.“ Beweisen Sie, dass diese Äquivalenz streng genommen falsch ist. Betrachten Sie hierfür die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \sin\left[(x^2 + y^2)^{-1}\right]$$

(an $(0, 0)$ stetig fortgesetzt) und untersuchen Sie jeweils am Koordinatenursprung die Differenzierbarkeit sowie die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen. *Bemerkung: Korrekt ist, dass aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen die (totale) Differenzierbarkeit folgt. Die Umkehrung gilt hingegen nicht immer. Für physikalisch relevante Fälle ist dies aber i.d.R. bedeutungslos.*

5. Funktionaldeterminantenkalkül: (8 + 5 + 10 = 23 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ der unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten:

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y , \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x , \tag{4}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} , \tag{5}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1} . \tag{6}$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch

$$\phi(x, y) = \text{const}$$

gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1}, \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1}. \tag{7}$$

(c) Betrachten Sie nun die drei Variablen x, y und z, die durch die Bedingung

$$F(x, y, z) = 0$$

miteinander in Zusammenhang stehen. Durch Auflösen der Gleichung $F = 0$ nach x, y und z erhalten wir die drei Funktionen $x(y, z)$, $y(x, z)$ und $z(x, y)$. Nehmen Sie weiter an, dass es einen funktionalen Zusammenhang $w = w(x, y)$ gibt. Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktionen folgende Relationen erfüllen:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z. \tag{10}$$